

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- § 1 EINFÜHRUNG: Beispiele und Typen von DGL
- KAP. I ELEMENTARE INTEGRATIONSMETHODEN
 - § 2 DGL 1. Ordnung. Elementar integrierbare Fälle
 - § 3 Lineare DGL, Verwandte DGL
 - § 4 Exakte DGL, Ebene autonome Systeme
- KAP. II EXISTENZ, EINDEUTIGKEIT UND STETIGE ABHÄNGIGKEIT
 - § 5 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis
 - § 6 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz
 - § 7 Abhängigkeit der Lösung von Anfangswerten und Parametern
- KAP. III LINEARE DGL
 - § 8 Allgemeine Aussagen über lineare DGL
 - § 9 Systeme mit konstanten Koeffizienten
 - § 10 Lineare DGL n-ter Ordnung
- KAP. IV STABILITÄT UND VERZWEIGUNG
 - § 11 Autonome DGL
 - § 12 Stabilitätstheorie
 - § 13 Grenzyklen. Der Satz von POINCARÉ-BENDIXON
 - § 14 HOPF-Verzweigung

H. HEUSER : Gewöhnliche DGL

Asymptotisch stabil.

stabil.

instabil.

Asymptotisch stabil.

Literaturverzeichnis

Lehrbücher der Differentialgleichungen sind mit einem Stern versehen.

- Achieser, N. I.; Glasmann, I. M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Berlin 1954
- *Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin-New York 1983
- *Arnold, V. I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin-Heidelberg-New York 1980
- *Arnold, V. I.: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York-Heidelberg-Berlin 1983
- Bailey, N. T.: The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications. 2nd ed. London-High Wycombe 1975
- Bellman, R.: Stability Theory of Differential Equations. New York 1953
- *Birkhoff, G.; Rota, G.-C.: Ordinary Differential Equations. 3rd ed. New York-Santa Barbara-Chichester-Brisbane-Toronto 1978
- *Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 4th ed. New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore 1986
- *Braun, M.: Differential Equations and Their Applications. 2nd ed. New York-Heidelberg-Berlin 1978
- *Burg, K.; Haf, H.; Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure III (Gewöhnliche Differentialgleichungen, Integraltransformationen, Distributionen). Stuttgart 1985
- Cesari, L.: Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. 2nd ed. New York 1963
- *Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of Ordinary Differential Equations. New York-Toronto-London 1955
- Collatz, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945
- Collatz, L.: The numerical treatment of differential equations, 3rd ed. Berlin-Heidelberg-New York 1966
- *Collatz, L.: Differentialgleichungen. 6. Aufl. Stuttgart 1981
- Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. 3. Aufl. Basel 1976
- Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. 5. Aufl. München 1985
- Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G.: Tables of Integral Transforms, Vol. I. New York-Toronto-London 1954
- Föllinger, O.: Laplace- und Fourier-Transformation. 3. Aufl. Frankfurt 1982
- *Franklin, P.: Differential Equations for Engineers. New York 1960
- Gause, G. F.: The Struggle for Existence. Baltimore 1934. Nachdruck: New York-London 1964

- Gröbner, W.; Hofreiter, N.: *Integraltafel. Erster Teil: Unbestimmte Integrale*, 5. Aufl. Wien-New York 1975. *Zweiter Teil: Bestimmte Integrale*. Wien-Innsbruck 1950
- Hahn, W.: *Stability of Motion*. Berlin-Heidelberg-New York 1967
- Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I*. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo 1987
- Hale, J. K.: *Oscillations in Nonlinear Systems*. New York 1963
- Hallam, Th. G.; Levin, S. A. (Ed.): *Mathematical Ecology*. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo 1986
- Heuser, H.: *Funktionalanalysis*. 2. Aufl. Stuttgart 1986
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. 5. Aufl. Stuttgart 1988
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. 4. Aufl. Stuttgart 1988
- *Hille, E.: *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Reading-Menlo Park-London-Don Mills 1969
- *Horn, J.; Wittich, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 6. Aufl. Berlin 1960
- Hort, W.; Thoma, A.: *Die Differentialgleichungen der Technik und Physik*. 4. Aufl. Leipzig 1944
- Hutchinson, G. E.: *An Introduction to Population Ecology*. New Haven-London 1978
- *Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*. London 1927. Nachdruck: New York 1956
- Jahnke, E.; Emde, F.; Lösch, F.: *Tafeln höherer Funktionen*. 7. Aufl. Stuttgart 1966
- *Kamke, E.: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. 2. Aufl. Leipzig 1950
- *Kamke, E.: *Differentialgleichungen I*. 5. Aufl. Leipzig 1964
- Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I*. 10. Aufl. Stuttgart 1983 (Unveränd. Nachdruck der 8. Aufl. Leipzig 1967)
- Kaplan, W.: *Operational methods for linear systems*. Reading-Palo Alto-London 1962
- *Knobloch, H. W.; Kappel, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Stuttgart 1974
- Knopp, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 5. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964
- Knopp, K.: *Funktionentheorie I*. 13. Aufl. Berlin-New York 1976
- Lebedew, N. N.: *Spezielle Funktionen und ihre Anwendungen*. Mannheim-Wien-Zürich 1973
- *Lefschetz, S.: *Differential Equations, Geometric Theory*, 2nd ed. New York 1963
- Lense, J.: *Kugelfunktionen*. 2. Aufl. Leipzig 1954
- Lotka, A. J.: *Elements of Physical Biology*. Baltimore 1925. Nachdruck unter dem Titel „Elements of Mathematical Biology“. New York 1956
- Marchuk, G. I.: *Mathematical Models in Immunology*. New York 1983
- McLachlan, N. W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford 1947
- McLachlan, N. W.: *Bessel Functions for Engineers*. Oxford 1955
- Meixner, J.; Schäfer, F.: *Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954
- Meixner, J.; Schäfer, F.; Wolf, G.: *Mathieu Functions and Spheroidal Functions and Their Mathematical Foundations. Further Studies*. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1980
- Mertins, U.: *Zur Herleitung von Einschließungssätzen für Eigenwerte*. In: *Numerical Treatment of Eigenvalue Problems*, Vol. 4. Basel-Boston 1987, S. 159-173
- Peschel, M.; Mende, W.: *The Predator-Prey Model*. Wien-New York 1986
- Pestel, E.; Wittenburg, J.: *Technische Mechanik II*. 2. Aufl. Mannheim-Wien-Zürich 1986
- *Reissig, R.; Sansone, G.; Conti, R.: *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*. Rom 1963
- Ritt, J. F.: *On the differentiability of the solution of a differential equation with respect to a parameter*. *Ann. Math.* **20** (1918/19) 289-291
- *Sansone, G.; Conti, R.: *Equazioni differenziali non lineari*. Roma 1956
- Stoer, J.: *Einführung in die Numerische Mathematik I*. 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1976
- Stoer, J.; Bulirsch, R.: *Einführung in die Numerische Mathematik II*. 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1978
- Stoker, J. J.: *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. New York 1950
- Szabó, I.: *Höhere Technische Mechanik*. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958
- *Tricomi, F. G.: *Differential Equations*. Glasgow 1961
- Voigt, A.: *Viètes Tangentenkonstruktion und eine Klasse ebener Kurven*. *Elemente der Mathematik* **41/6** (1986) 155-162
- Voigt, A.: *Alle Kurven, für die Viètes Tangentenkonstruktion exakt ist*. *Math. Semesterberichte* 1989
- Volterra, V.: *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris 1931
- *Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 3. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1985
- Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 3rd ed. Cambridge 1958
- Weissinger, J.: *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*. *Math. Nachr.* **8** (1952) 193-212
- *Werner, H.; Arndt, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo 1986
- Willers, F. A.: *Methoden der praktischen Analysis*. 4. Aufl. Berlin-New York 1971
- Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. 5. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965

§ 1 Einführung: Beispiele und Typen von DGL

1.1 Wachstumsmodelle

(a) Exponentielles Wachstum

Es bezeichne

$y(t)$: Radioaktive Substanz
bzw. Größe einer Popula-
tion zur Zeit t ,

λ : Konstante;

$\lambda > 0$: Wachstum,

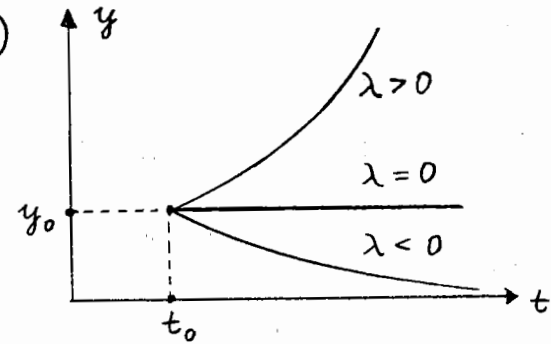
$\lambda < 0$: Zerfall.

$y(t)$ genügt einer linearen
DGL 1. Ordnung

$$(1.1) \quad \dot{y} = \lambda y, \quad y(t_0) = y_0.$$

Die Lösung lautet

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$



Anwendung: ^{14}C Methode zur Altersbestimmung organischer Reste

$y(t)$: Anzahl der Atome in einer
radioaktiven Probe,
 t in Jahren,

$\dot{y}(t)$: Anzahl der Zerfälle pro Zeit-
einheit.

In lebenden Pflanzen und Tieren stellt sich ein konstantes Mengenverhältnis von stabilem Kohlenstoffisotop ^{12}C zum

ii.3

radioaktiven Isotop ^{14}C ein.
Nach dem Tod des Organismus
ändert sich dieses Verhältnis,
da kein Kohlenstoff ^{12}C mehr
aufgenommen wird und nur
noch der Zerfall von ^{14}C
stattfindet.

Beispiel: Ein Holzgegenstand
ist zur Zeit $t=0$ hergestellt
worden.

z_0 : ursprüngliche Zerfallsrate,
 $z_0 = \dot{y}(0) = \lambda y_0$, $\lambda < 0$;

$z(t)$: gegenwärtige Zerfallsrate
 $z(t) = \dot{y}(t) = \lambda y(t) = \lambda y_0 e^{\lambda t}$
 $= z_0 e^{\lambda t}$

Das Alter t berechnet sich dann aus

ii.4

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{z(t)}{z_0} \right)$$

Beispiel: In der großen Halle des
Winchester Castle, England, steht ein
Rundtisch, der als Tisch von König
Artus (5. Jh) angesehen wurde.

Es gilt

$$\lambda = -1.245 \cdot 10^{-4} \text{ (pro Jahr) für } ^{14}\text{C},$$

$$z_0 = 6.68 \text{ in lebendem Holz.}$$

Gemessen wurde die Zerfallsrate im
Tisch

$$z(t) = 6.08$$

Das Alter des Tisches ist dann

$$t = \frac{1}{1.245 \cdot 10^{-4}} \ln \left(\frac{6.68}{6.08} \right) \approx 750 \text{ Jahre.}$$

Also hat König Artus seine Gäste

nicht an diesem Tisch bewirtet.

Literatur: BURGHESE/BORRIE (1981),
§ 2.3.

(b) Logistisches Wachstum

Das Wachstum einer biologischen Population $y(t)$ wird gut beschrieben durch die nichtlineare DGL

1. Ordnung

$$(1.2) \quad \dot{y} = ay - by^2 = ay \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad K := \frac{a}{b},$$

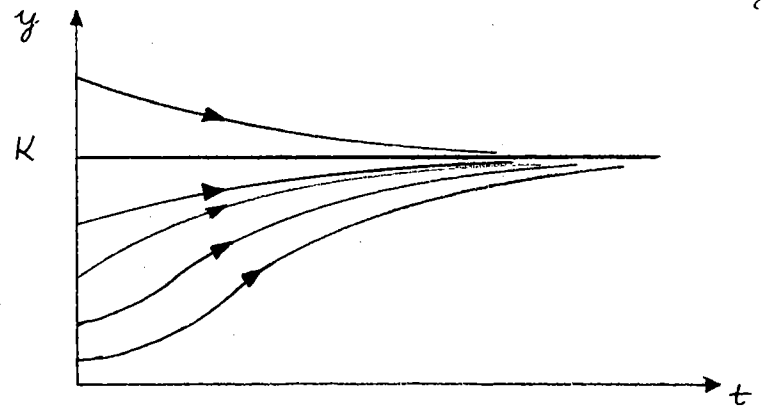
$$y(0) = y_0.$$

Für die Lösung

$$y(t) = K \frac{y_0}{y_0 + (K - y_0) e^{-a(t-t_0)}}$$

gilt asymptotisch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K \quad \text{für alle } y_0 > 0.$$



(c) Räuber-Beute-Modell

Es bezeichne

$x(t)$: Anzahl der Beutetiere zur Zeit t (Rehe, Kervinge, Lemminge)

$y(t)$: Anzahl der Räubertiere zur Zeit t (Wölfe, Haifische, Menschen)

In Fiume, Italien, wurde der folgende Prozentsatz der Räuberfische am totalen Fischfang gemessen:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

Problem: Wie kommt die reduzierte Fangintensität während des Krieges den Raubfischen zugute?

1.7

Modell von LOTKA-VOLTERRA (1927)

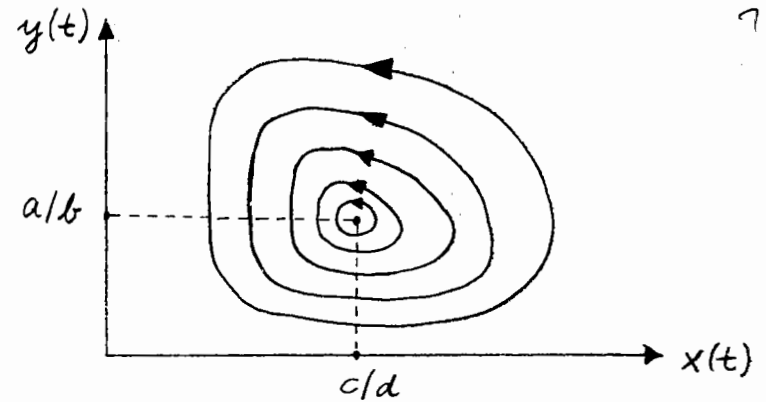
$x(t), y(t)$ genügen dem System nichtlinearer DGL 1. Ordnung

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad x(t_0) = x_0 > 0,$$

$$(1.3) \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad y(t_0) = y_0 > 0,$$

$$a, b, c, d > 0.$$

Die Lösungen verlaufen periodisch um den Gleichgewichtspunkt $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ mit $\dot{x} = \dot{y} = 0$.



Das anfangs gestellte Problem wird in §4.2 beantwortet werden.

1.2 Die NEWTON'sche Bewegungsgleichung

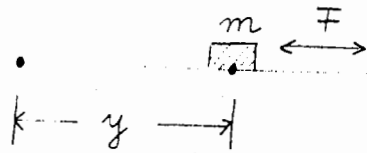
Sei

$y(t)$: Abstand eines Körper der Masse m vom Ursprung zur Zeit t ,

$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$: Geschwindigkeit,

$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$: Beschleunigung,

$F = F(t, y, \dot{y})$: einwirkende Kraft.



$y(t)$ ist Lösung der DGL 2. Ordnung

$$(1.4) \quad \boxed{\begin{aligned} m \ddot{y} &= F(t, y, \dot{y}), \\ y(0) &= y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \end{aligned}}$$

(a) Freier Fall:

$F = mg$, g : Erdbeschleunigung,

$$\ddot{y} = g$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0.$$

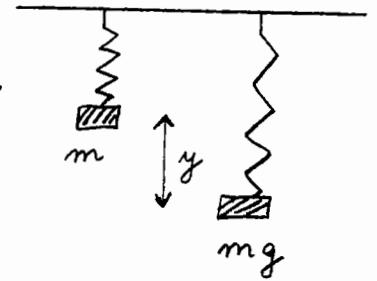
(b) Ungedämpfte Schwingung:

$$F(t, y, \dot{y}) = -ky + mg,$$

$$\ddot{y} + ky = mg,$$

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Die Lösung wird
in § 10 diskutiert.



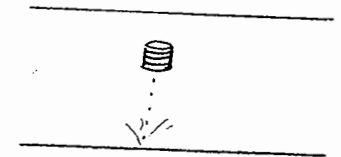
(c) Eintauchen in eine Flüssigkeit:

$$F(t, y, \dot{y}) = G - A - R$$

$G = mg$: Gewicht,

A : Auftrieb,

$R = c\dot{y}$: Reibung.



$$\ddot{y} = \frac{g}{G} (G - A - c\dot{y}), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Setze $v = \dot{y}$:

$$\dot{v} + \frac{c}{G} v = \frac{g}{G} (G - A), \quad v(0) = 0.$$

(Lineare DGL 1. Ordnung)

Praktisches Problem: Welche Sinkgeschwindigkeit hat der Körper in einer vorgegebenen Tiefe?

(d) Satellitenbahn: (vgl. Walter, S.5)

Die folgenden beiden DGL 2. Ordnung beschreiben die Bewegung eines Satelliten im Kraftfeld zweier Körper (Erde und Mond). Dabei ist angenommen, daß die Bewegung der drei Körper in einer festen Ebene erfolgt. Die Position des Satelliten wird durch die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ beschrieben.

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \mu' \frac{x+y}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{2/3}}$$

$$- \mu \frac{x - \mu'}{[(x - \mu')^2 + y^2]^{2/3}}$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \mu' \frac{y}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{2/3}} - \mu \frac{y}{[(x - \mu')^2 + y^2]^{2/3}}$$

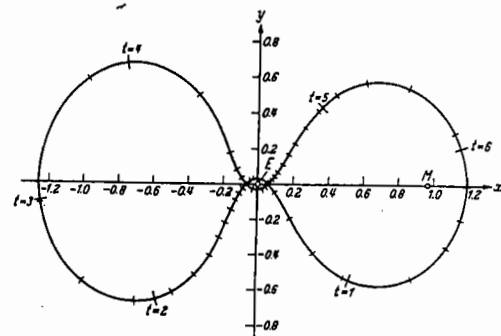
$$\mu = 0.01213, \quad \mu' = 1 - \mu.$$

Die Lösungen sind periodisch. Für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 1.2, \quad y(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1.04936$$

erhält man numerisch



Periodische Bewegung im Schwerfeld von Erde und Mond

mit der Periode $T = 6.19217$.

1.3 Modellierung eines Nervenimpulses

Es bedeuten

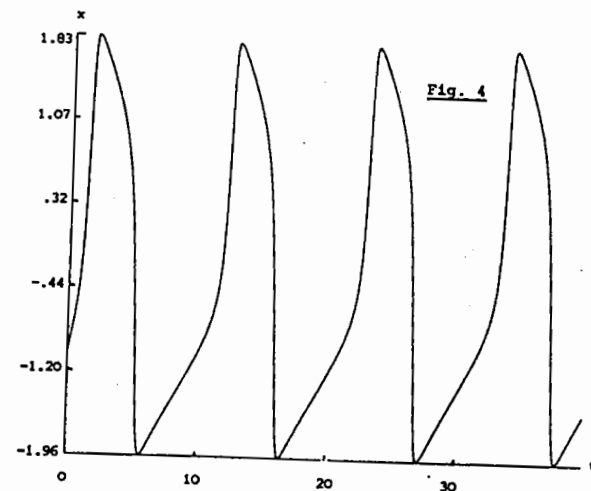
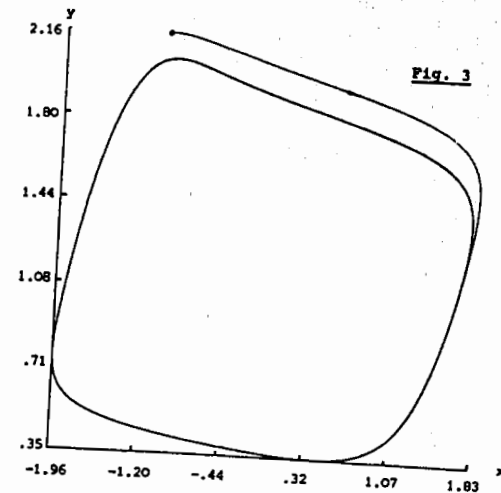
$x(t)$: Membranpotential,

$y(t)$: Aktivierbarkeit einer Nervenzelle.

Die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$(1.5) \quad \begin{cases} \dot{x} = 3(y + x - \frac{x^3}{3} - 1.3), & x(0) = -1.03 \\ \dot{y} = -(x - 0.7 + 0.8y)/3, & y(0) = 2.16 \end{cases}$$

hat eine Lösung, welche sich asymptotisch einem Grenzzyklus nähert:



Literatur: SEYDEL / BULIRSCH: Vom Regenbogen zum Farbfernsehen, S. 84-92, Springer Verlag, 1986.

1.4 Typen von DGL

Implizite DGL n-ter Ordnung:

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und $F \in C(D)$.

Gesucht ist eine n-mal differenzierbare Funktion $y = y(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, mit

$$(1.6) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Falls F linear in $y, y', \dots, y^{(n)}$ ist, so heißt die DGL linear:

$$(1.7) \quad a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = b(x),$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n, b \in C(I).$$

Explizite DGL n-ter Ordnung:

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C(D)$ und $I \subset \mathbb{R}$.

Gesucht ist $y \in C^n(I)$ mit

$$(1.8) \quad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

Systeme von DGL 1. Ordnung

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f_i \in C(D)$, $i = 1, \dots, n$. Gesucht sind Funktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, mit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

In den Anwendungen bedeutet meistens t die Zeit und

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \text{Zustand eines Systems zur Zeit } t.$$

Mit $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ lautet die DGL

1.17

(1.9) $\dot{x} = f(t, x)$

Es liegt ein System linearer DGL vor, falls f_i affin-linear in x_i ist:

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + b_i(t), \quad i=1, \dots, n.$$

Mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} \text{ (m,n)-Matrix,}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix}$$

hat eine lineare DGL die Form:

(1.10) $\dot{x} = A(t)x + b(t)$

Eine explizite DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

ist äquivalent zu einem System von n DGL 1. Ordnung. Setzt man nämlich

$$x_1 := y, \quad x_2 := \dot{y}, \quad x_3 := y^{(2)}, \quad \dots, \quad x_n := y^{(n-1)},$$

so erhält man das System

(1.11)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Wenn außerdem f affin-linear in x_1, \dots, x_n ist,

$$f = a_0(t)x_1 + a_1(t)x_2 + \dots + a_{n-1}(t)x_n + c(t),$$

so lautet die zugehörige lineare DGL

$$(1.12) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = (0, \dots, 0, c(t))^T.$$

1.5 Steuerung und Regelung

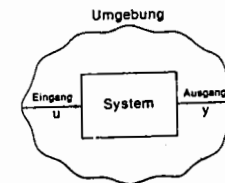
Die DGL (1.9) wird modifiziert, indem eine Eingangsgröße (Steuerung, Störungsgröße)

$$u = u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

auf den Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^n$ eines Systems einwirkt gemäß

$$(1.13) \quad \dot{x} = f(t, x, u)$$

mit $f: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. In dieser Form lassen sich viele dynamische Systeme beschreiben mit Anwendungen in der Physik, Chemie, Biologie, Medizin, Volks- und Betriebswirtschaft.



Schematische Darstellung eines Systems

Der Ausgang $y = y(t)$ ist dabei gegeben durch eine Funktion $h(x)$ des Zustandes $x(t)$:

1.21

$$y(t) = h(x(t)), \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

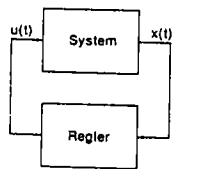
Eine Zustandsrückführung
(Rückkopplung) liegt vor, wenn
der Eingang u an den Zustand
 x gekoppelt ist

$$u = u(x).$$

Die DGL (1.13) geht dann
über in

$$\dot{x} = f(t, x, u(x)) = F(t, x).$$

Damit können Regelkreise
modelliert werden:



Zustandsrückführung

1.22

1.6 Lösung einer DGL, Anfangswertaufgaben

Alle bisherigen Typen von DGL
können auf ein System von
DGL 1. Ordnung

$$(1.9) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

Zurückgeführt werden. Hierbei sei
 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine
Funktion $x(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt
Lösung der DGL (1.9) im Inter-
vall I , wenn gilt

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in D$$

für $t \in I$.

Anfangswertaufgabe (AWA)

Sei I ein Intervall und sei $(t_0, x_0) \in D$ mit $t_0 \in I$. Eine Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt Lösung der AWA

$$(1.14) \quad \boxed{\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0}$$

wenn $x(\cdot)$ eine Lösung der DGL in I ist, welche dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$ genügt.

Für eine skalare DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

hat man dann wegen der Substitution $x_i = y^{(i-1)}$ ($i=1, \dots, n$)

in (1.11) die Anfangsbedingung

$$(1.15) \quad y^{(i)}(t_0) = c_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

vorgegeben.

Bei der Untersuchung der Lösungen von AWA stellen sich die folgenden

Probleme:

- (1) Existenz: Die AWA soll mindestens eine Lösung besitzen.
- (2) Eindeutigkeit: Die AWA soll nur eine Lösung besitzen.
- (3) Stetige Abhängigkeit: Die Lösung der AWA soll stetig von den Anfangswerten t_0, x_0 bzw. von Daten in der rechten Seite $f(t, x)$ abhängen.

Die Lösung einer AWA läßt sich nur in wenigen Fällen explizit berechnen; vgl.

§ 2,3,4,9,10. Im allgemeinen muß man auf numerische Verfahren zurückgreifen; vgl. die FORTRAN-Routinen der IMSL-Bibliothek, Chapter 5, S. 629 ff.

§2 Skalare DGL 1. Ordnung. Elementar integrierbare Fälle.

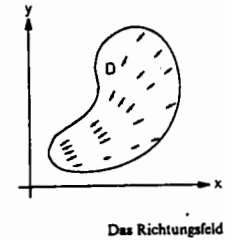
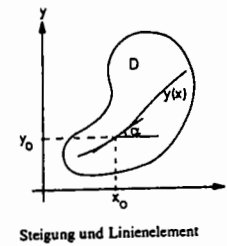
Nur betrachten die folgende AWA für eine skalare DGL 1. Ordnung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad y(x) \in \mathbb{R}$$

Dabei sei $f \in C(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$
und $(x_0, y_0) \in D$.

Die DGL (2.1) gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Für eine Lösung $y(x)$ der AWA ist die Steigung in $x = x_0$ gerade $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Diese Betrachtung gilt für jeden Punkt $(x, y) \in D$. Die Gesamtheit der Tripel $(x, y, f(x, y))$ mit $(x, y) \in D$



bildet das Richtungsfeld. Eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ "passt" dann auf das Richtungsfeld.

Die verschiedenen Phänomene bei der Lösung von DGL sollen zunächst an einfachen Beispielen studiert werden.

plus kurze Wiederholung
Beispiele:

→ ① $y' = -3y, \quad y(0) = y_0 \quad (D = \mathbb{R}^2),$
 $y(x) = y_0 e^{-3x}$ ist eindeutige

Lösung in $I = \mathbb{R}$.

$$\textcircled{2} \quad D = \{(x, y) \mid x \neq 0\},$$

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = y_0,$$

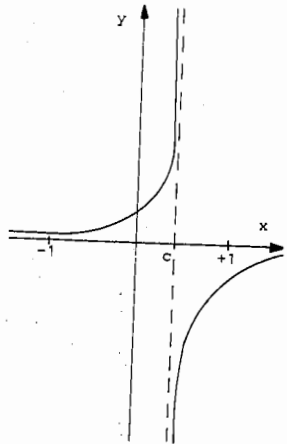
$y(x) = \ln x + y_0$ ist eindeutige Lösung in $I = (0, \infty)$.

$$\textcircled{3} \quad y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0 \quad (D = \mathbb{R}^2),$$

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x} \text{ ist eindeutige}$$

Lösung in $I = (-\infty, \frac{1}{y_0})$.

$$(c = \frac{1}{y_0})$$



$\textcircled{4}$ Die DGL mit $D = \mathbb{R}^2$

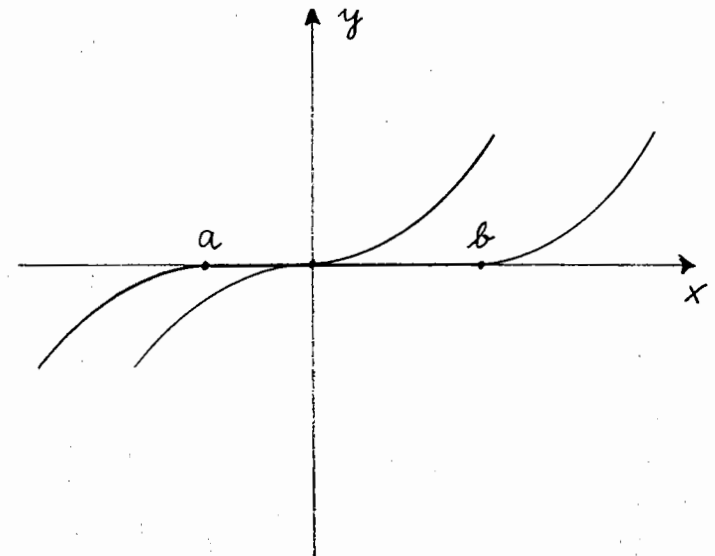
$$y' = \sqrt{|y|}$$

hat unendlich viele Lösungen

$$y(x) = y(x; a, b) = \begin{cases} -\frac{(x-a)^2}{4}, & x \leq a \\ 0, & a \leq x \leq b \\ \frac{(x-b)^2}{4}, & b \leq x \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{R}_0^- \cup \{-\infty\} \quad b \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

für alle $a \leq 0$, $b \geq 0$, und $y(x) \equiv 0$.



Zu dem Anfangswert $y(2) = 1$ gehört die Lösungsschar mit $b = 0, a \leq 0$

$$y(x) = y(x; a) = \begin{cases} -(x-a)^2/4, & x \leq a \\ 0, & a \leq x \leq 0 \\ x^2/4, & x \geq 0 \end{cases}$$

und

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/4, & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Art der Mehrdeutigkeit ist verschieden, je nachdem, ob der Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ Null oder von Null verschieden ist. Im Falle $y_0 = 0$ verzweigen sich die Lösungen direkt an der Stelle (x_0, y_0) ; im

Falle $y_0 \neq 0$ liegt zunächst eine lokal eindeutige Lösung vor, welche sich erst in einiger Entfernung von (x_0, y_0) verzweigt.

Elementare Integrationsmethoden

I. Stammfunktion

$$(2.2) \quad \boxed{y' = f(x), y(x_0) = y_0}$$

Die Funktion f sei stetig in einem Intervall I . D ist also der Streifen $I \times \mathbb{R}$. Offenbar ist die Lösung der AWA (2.2) gegeben durch die

Stammfunktion

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \quad \text{für alle } x \in I.$$

II. DGL mit getrennten Veränderlichen

Beispiele 1 und 3
für $y_0 \neq 0$
 $y' = -2y$ $y' = y^2$

$$(2.3) \quad y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

Sei $f(x)$ stetig in einem Intervall I_x und $g(y)$ sei stetig in einem Intervall I_y .

Zunächst heuristisch ergibt sich aus der DGL $y' = f(x)g(y)$ die Gleichung

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

und daraus durch Integration die Methode der Trennung der Variablen:

$$(2.4) \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Diese gilt formal für $g(y) \neq 0$. Bei Berücksichtigung des Anfangswertes $y(x_0) = y_0$ erhält man die Gleichung

$$(2.5) \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t) dt =: F(x)$$

(2.6) Satz: Sei $y_0 \in \overset{\circ}{I}_y$ mit $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine

Umgebung von x_0 bzgl. I_x ,
in der die AWA (2.3) genau
eine Lösung $y(x)$ besitzt.
Diese ergibt sich aus (2.5)
durch Auflösung nach y ,
d.h. $G(y(x)) = F(x)$.

Beweis: In einer Umgebung von
 y_0 gilt $g(y) \neq 0$. Also existiert ^{Taschenrechner I}
 $G(y)$ in dieser Umgebung, und ^{Satz 3}
wegen $G' = 1/g \neq 0$ besitzt G ^{8.105}
eine differenzierbare Umkehr-
funktion H . Durch Auflösen
von $G(y) = F(x)$ erhält man
die differenzierbare Funktion

$$y(x) = H(F(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Wir wollen zeigen, daß $y(x)$
Lösung der AWA (2.3) ist. Aus

$G(y(x)) = F(x)$ folgt nämlich
durch Differentiation

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) = f(x),$$

also wegen $G' = 1/g$

$$y' = f(x) g(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit
nehmen wir an, daß $z(x)$ irgend-
eine Lösung von (2.3) ist. Dann
gilt $g(z(x)) \neq 0$ in einer Um-
gebung von x_0 und daher

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x).$$

Durch Integration und Sub-
stitution $s = z(x)$ folgt daraus

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{g(z(t))} dt = \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)}.$$

Dies besagt $F(x) = G(z(x))$, also
 $z(x) \equiv y(x)$ wegen $z(x_0) = y_0$. ■

Im Falle $g(y_0) = 0$ ist offenbar
 $y(x) \equiv y_0$ eine Lösung. Diese ist
 in einer Umgebung von x_0 die
 einzige Lösung, wenn g zusätz-
 lich einer Lipschitz-Bedingung
 genügt:

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

$$\forall y_1, y_2 \in I_y.$$

Diese Aussage ist ein Spezialfall
 des Existenz- und Eindeutigkeits-
 satzes (6.5).

(2.7) Beispiele:

① $y' = xy$, $y(0) = y_0$ (Lineare DGL).

Hier ist nach (2.5) für $y_0 \neq 0$:

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{s} = \ln \frac{y}{y_0} \quad \text{für } y/y_0 > 0,$$

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2.$$

Die Auflösung von $G(y) = F(x)$
 ergibt

$$y(x) = y_0 e^{x^2/2}.$$

Im Falle $y_0 = 0$ ist $y(x) \equiv 0$
 die einzige Lösung, da $g(y) = y$
 eine Lipschitz-Bedingung
 mit $K=1$ erfüllt.

② $y' = e^y \sin x$.

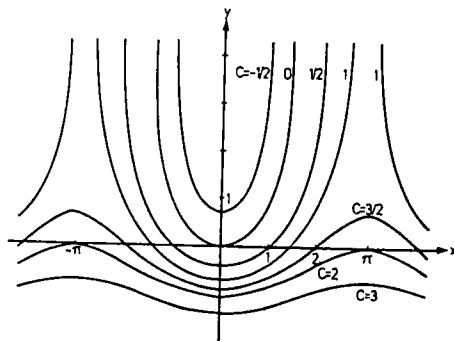
Ist $y(x)$ eine Lösung der

DGL, so ist auch $u(x) = y(-x)$ und $u(x) = y(x + 2k\pi)$ eine Lösung, d. h. die Lösungen sind symmetrisch zur y -Achse und 2π -periodisch. Durch Trennung der Variablen (2.4) erhält man

$$\int e^{-y} dy = -e^{-y} \\ = \int \sin x dx = -\cos x - c,$$

d. h.

$$y(x; c) = -\ln(\cos x + c), \quad \cos x + c > 0.$$



Lösungskurven der Differentialgleichung $y' = e^y \sin x$

Jede AWA mit $y(x_0) = y_0$ ist damit eindeutig lösbar, d. h. c hängt eindeutig von (x_0, y_0) ab. Die Lösungen haben sehr verschiedenartiges Verhalten bzgl. c :

$c > 1$: wegen $\cos x + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung $y(x)$ in $I = \mathbb{R}$.

$-1 < c \leq 1$: Sei $x_c \in [0, \pi]$ die Nullstelle von $\cos x + c = 0$. Dann existiert $y(x)$ in $I_c = (-x_c, x_c)$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm x_c} y(x; c) = \infty.$$

$c \leq -1$: es gibt keine Lösung.

③ Reaktion auf einen Reiz:

Der Physiologe G. FECHNER (1801-1887) entwickelte ein Modell, das die Reaktion R (response) auf einen Reiz S (stimulus) beschreibt. Der kleinste wahrnehmbare Reiz S_0 (Reizschwelle) ist gekennzeichnet durch $R(S_0) = 0$. Das Modell wird durch die AWA

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S}, \quad R(S_0) = 0 \quad (k > 0),$$

beschrieben. Die Lösung ist

$$R(S) = k \ln(S/S_0)$$

(WEBER-FECHNER-Gesetz).

III. Die DGL

$$(2.8) \quad y' = f(ax + by + c)$$

Ist $y(x)$ eine Lösung, so gilt für

$$u(x) := ax + by(x) + c$$

(nur $b \neq 0$ ist interessant) die DGL

$$u' = a + by' = a + b f(u),$$

also eine DGL vom Typ (2.3) mit $g \equiv 1$.

Beispiel:

$$y' = (x + y)^2,$$

$$u(x) = x + y(x),$$

$$u' = 1 + u^2, \quad u(x) = \operatorname{tg}(x+c),$$

$$y(x; c) = \operatorname{tg}(x+c) - x.$$

IV Homogene DGL

$$(2.9) \quad \boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Für

$$u(x) := \frac{y(x)}{x}, \quad x \neq 0,$$

ergibt sich

$$y' = u + x u' = f(u),$$

also eine DGL mit getrennten
Veränderlichen

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Umgekehrt ergibt jede Lösung
 $u(x)$ eine Lösung $y(x) = x \cdot u(x)$
von (2.9).

Beispiel: Die AWA

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \quad y(1) = 1,$$

führt auf die AWA für u

$$f(u) = u - \frac{1}{u^2},$$

$$u' = -\frac{1}{x u^2}, \quad u(1) = 1.$$

Die Methode (2.5) ergibt

$$\begin{aligned} \int_1^u z^2 dz &= \frac{1}{3} (u^3 - 1) \\ &= -\int_1^x \frac{dt}{t} = -\ln x. \end{aligned}$$

Also lauten die Lösungen u bzw. y

$$u(x) = \sqrt[3]{1 - 3 \ln x}, \quad y(x) = x \cdot u(x),$$

$$0 < x < \sqrt[3]{e} \approx 1.396.$$

§3 Die lineare DGL, Verwandte DGL

Sei I ein Intervall und $a, b \in C(I)$.

Der AWA mit einer linearen DGL

$$(3.1) \quad y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ordnen wir den Operator

$$L[y] := y' + a(x)y \quad \text{für } y \in C^1(I)$$

zu. L ist ein linearer Operator wegen

$$L[\alpha y + \beta z] = \alpha L[y] + \beta L[z]$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y, z \in C^1(I)$.

Homogene DGL: $b(x) \equiv 0$.

Die DGL

$$(3.2) \quad L[y] = y' + a(x)y = 0$$

hat getrennte Veränderliche (2.3).

Nach (2.4) lautet die allgemeine Lösung

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = - \int a(x) dx + c,$$

also

$$(3.3) \quad y(x; c) = c e^{-G(x)}, \quad G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt,$$

$x_0 \in I$.

Zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gehört dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = y_0 e^{-G(x)}, \quad G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Inhomogene DGL

$$(3.4) \quad L[y] = y' + a(x)y = b(x).$$

Lösungsansatz: Variation der Konstanten

In (3.3) ersetze man c durch eine Funktion $c(x)$:

$$y(x) = c(x) e^{-G(x)}, \quad G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Es ist

$$L[y] = (c' - ac + ac) e^{-G(x)} = b(x),$$

also muß gelten

$$c' = b(x) e^{G(x)}.$$

Für $y(x_0) = y_0$ ergibt dies

$$c(x) = \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)} dt + y_0.$$

Die eindeutige Lösung der AWA (3.1) ist damit gegeben durch

(3.5)

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)} dt \right),$$

$$G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

$$y' = ay + b, \quad y(x_0) = y_0$$

Sind y, \bar{y} zwei Lösungen der inhomogenen DGL $L[y] = b(x)$, so ist

$$L[y - \bar{y}] = L[y] - L[\bar{y}] = 0,$$

also ist $y_0 = y - \bar{y}$ eine Lösung der homogenen DGL. Man erhält also alle Lösungen $y(x)$ der inhomogenen DGL in der Form

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x),$$

$\bar{y}(x)$: fest gewählte Lösung von $L[y] = b(x)$,

$y_0(x)$: beliebige Lösung von $L[y] = 0$.

Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad y' + 2xy = x, \quad y(1) = 2,$$

$$G(x) = \int_1^x 2t dt = x^2 - 1.$$

Nach (3.5) berechnet sich die Lösung zu

$$y(x) = e^{1-x^2} \left(2 + \int_1^x t e^{t^2-1} dt \right)$$

$$= e^{1-x^2} \left(2 + \frac{1}{2} e^{x^2-1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{1-x^2}.$$

$\textcircled{2}$ Bei einer Abänderung der ¹⁴G-Methode (vgl. § 1.1 (a)) ist das Zerfallsgesetz gegeben durch die AWA

$$\dot{y} = -\lambda y + \tau, \quad y(t_0) = y_0,$$

mit $\lambda, \tau > 0$. Die Lösung ist nach (3.5)

$$G(t) = \int_{t_0}^t \lambda dt = \lambda(t - t_0),$$

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{\tau}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}).$$

Hiermit sind mehrere Gemälde auf ihre Echtheit überprüft worden; vgl. BRAUN (1975), § 1.3.

3.2 Die BERNOULLI-DGL:

J. BERNOULLI (1667-1748)

$$(3.6) \quad y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 1$$

Gesucht sind Lösungen mit $y(x) > 0$. Multipliziert man (3.6) mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, so erhält man

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(x) = 0.$$

Dann genügt $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ der linearen DGL

$$(3.7) \quad z' + (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x) = 0.$$

Für ganze Zahlen ist auch $y(x) < 0$ zugelassen.

3.3 Die RICCATI-DGL:

J. RICCATI (1676-1754)

$$(3.8) \quad y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Die RICCATI-DGL hat in vektorieller Form wichtige Anwendungen in der Steuerung- und Regelungstheorie. Das einfachste Beispiel ist die DGL

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

$$y(x) = \tan(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} y(x) = \pm \infty.$$

Die Lösung $y(x)$ der RICCATI-DGL (3.8) hat im allg. Pole im Endlichen; $y(x)$ ist meistens nicht geschlossen berechenbar.

(a) Lösung bei bekannter
spezieller Lösung

Für die Differenz zweier Lösungen $y(x)$ und $y_0(x)$, $u(x) = y(x) - y_0(x)$, gilt

$$u' + a(x)u + b(x)(y^2 - y_0^2) = 0.$$

Wegen

$$y^2 - y_0^2 = (y - y_0)(y + y_0) = u(u + 2y_0)$$

genügt u der BERNULLI-DGL

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0.$$

Diese wird durch die Transforma-
tion

$$z(x) = \frac{1}{u(x)}$$

in die lineare DGL

$$(3.9) \quad z' - (a(x) + 2y_0(x)b(x))z - b(x) = 0$$

übergeführt.

Ergebnis: Kennt man eine spezielle Lösung $y_0(x)$ der RICCATI-DGL (3.8), so erhält man alle Lösungen in der Form

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)},$$

$z(x)$: beliebige Lösung von (3.9).

Beispiel: $y' - y^2 - 2xy = 2$

Eine spezielle Lösung ist

$$y_0(x) = -\frac{1}{x}. \text{ Die lineare DGL (3.9)}$$

lautet

$$z' + \left(2x - \frac{2}{x}\right)z + 1 = 0$$

und hat die Lösungen

$$z(x; c) = x + x^2 e^{-x^2} (c - 2E(x)), \quad c \in \mathbb{R},$$

$$E(x) := \int_0^x e^{t^2} dt \quad \text{Fehlerfunktion.}$$

Die allgemeine Lösung der
RICCATI-DGL ist damit

$$y(x; c) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z(x; c)}, \quad y(0; c) = -c.$$

(b) Rückführung auf eine homo-
gene lineare DGL 2. Ordnung

Sei $y(x)$ eine Lösung von (3.8)
und sei $b \in C^1(I)$ mit
 $b(x) \neq 0$. Macht man den
Ansatz

$$y = \frac{1}{b(x)} \frac{u'}{u}, \quad \text{d.h. } u(x) = e^{\int b(x) y(x) dx},$$

dann genügt $u(x)$ der linearen
DGL 2. Ordnung

$$(3.10) \quad u'' + \left(a(x) - \frac{b'(x)}{b(x)} \right) u' - b(x) c(x) u = 0$$

$$f(x,y) + g(x,y) y' = 0$$

$$f \dot{x} + g \dot{y} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$y \cdot \dot{x} - \dot{y} = 0 \quad H_x = f \quad H_y = g$$

$$L = g \dot{x}$$

$(f(x,y), g(x,y))$

$$f(x,y) + g(x,y) y' = 0$$

$$\left(\begin{matrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{matrix} \right)$$

$$f(x,y) = y^2$$

$$g(x,y) = \sin y$$

$$L = \sin y$$

$$g = \sin y$$

$$\int_{y_0}^y f(x) + \int_{x_0}^x g(x) = H$$

$$H_x = g$$

$$H_y = f$$

$$f(x) + g(y) y' = 0 \quad dx \alpha dt$$

$$\int_{x_0}^x f(x) dx + \int_{y_0}^y g(y) dy = H(x,y)$$

$$H(x,y)$$

$$u(y) = \int_{x_0}^x g(x,y) dx - \int_{y_0}^y \underbrace{F_x(x,y)}_{F(x,y)} dy = \int_{y_0}^y g(x,y) dy - \int_{x_0}^x f(x,y) dx$$

$$F(x,y)$$

$$\int_{x_0}^x (e^{3x} + 3xy) dx = e^{3x} + 3xy + C = F(x,y)$$

$$\int_{y_0}^y [3x + \cos y - 3xy] dy = 3xy - \sin y - \frac{3}{2} y^2$$

$$H(x,y) = e^{3x} + 3xy + \sin y$$

$$\dot{y} = \frac{L}{g}$$

$$3x + \cos y = g = 3x + \cos y$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$y' \cdot f - g = 0$$

$$k_y = \cos y$$

$$k = \sin y$$

§4 Exakte DGL, Ebene autonome Systeme.

4.1 Exakte DGL

Motivationsbeispiel:

Die implizite Darstellung eines Kreises ist

$$H(x, y) := x^2 + y^2 = r^2.$$

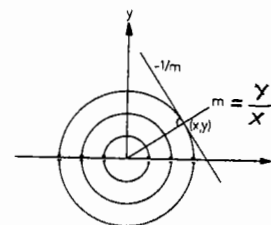
Die explizite Darstellung

$$y(x) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r < x < r,$$

genügt der DGL

$$y' + \frac{x}{y} = 0, \quad \text{d.h. } x dx + y dy = 0.$$

In den Punkten $x = \pm r$ wird $y = 0$ und die Ableitung unendlich. Zur Vermeidung dieser



Nachteile führt man die Parameter-Darstellung eines Kreises ein

$$x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos t,$$

welche der DGL

$$x \dot{x} + y \dot{y} = 0$$

genügt.

Allgemein betrachten wir die DGL

$$(4.1) \quad \boxed{f(x, y) + g(x, y) y' = 0}$$

Hierbei sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f, g \in C(D)$. In symmetrischer Darstellung lautet die DGL

$$(4.1.a) \quad f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0.$$

Sucht man Lösungen in der Parameter-Darstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, so erhält man

$$(4.1.b) \quad f(x, y) \dot{x} + g(x, y) \dot{y} = 0.$$

Ist umgekehrt $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Lösung von (4.1.b) mit $\dot{x}(t_0) \neq 0$, so gilt $\dot{x}(t) \neq 0$ in einer Umgebung von t_0 ; es gibt also eine Umkehrfunktion $t = t(x)$. Für die Funktion $y(x) = y(t(x))$ gilt dann

$$y' = \dot{y} \frac{dt(x)}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

also ist die DGL (4.1) wegen (4.1.b) erfüllt. Wir betrachten von nun an die DGL (4.1), (4.1.a), (4.1.b) als äquivalent.

Die DGL (4.1) heißt exakt, wenn eine Funktion $H \in C^1(D)$ existiert mit

$$H_x(x, y) = f(x, y),$$

$$H_y(x, y) = g(x, y) \quad \text{in } D.$$

H heißt Stammfunktion (bzw. HAMILTON-Funktion).

(4.2) Satz: Sei (4.1) exakt und H eine Stammfunktion. Dann ist $y(x)$ genau dann eine Lösung von (4.1), wenn gilt

$$H(x, y(x)) = \text{const.}$$

Beweis: Es ist

$$\frac{d}{dx} [H(x, y(x))] = H_x + H_y y' = f + g y' = 0,$$

also $H(x, y(x)) = \text{const.}$ ■

Der Graph der Lösung $y(x)$ ist also enthalten in den Niveaulinien $H(x, y) = \text{const.}$

Beispiel: Die DGL

$$e^x + 3y + (3x + \cos y) y' = 0$$

ist exakt mit

$$H(x, y) = e^x + 3xy + \sin y.$$

(4.3) Satz: (Kriterium für Exaktheit)

Sei D einfach zusammenhängend und seien $f, g \in C^1(D)$.

Dann ist (4.1) genau dann exakt, wenn gilt

$$f_y \equiv g_x \quad \text{in } D.$$

Beweis: Eine Stammfunktion erhält man wegen $H_x = f$, $H_y = g$ durch das Kurvenintegral

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{(x_0, y_0)}^{(\bar{x}, \bar{y})} (f(x, y) dx + g(x, y) dy),$$

wobei $(x_0, y_0) \in D$ ein fester Punkt ist und längs eines beliebigen, die Punkte (x_0, y_0) und (\bar{x}, \bar{y}) verbindenden Streckenzuges

4.7

integriert wird. Dieses Kurvenintegral ist genau dann vom Wege unabhängig, wenn $f_y \equiv g_x$ in D gilt. ■

? warum

(4.4) Lösungsmethode:

Man macht den Ansatz

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{x_0}^{\bar{x}} f(x, \bar{y}) dx + K(\bar{y})$$

$$=: F(\bar{x}, \bar{y}) + K(\bar{y}).$$

Wegen

$$H_y = F_y + K_y = g$$

berechnet man K zu

$$K(\bar{y}) = \int_{y_0}^{\bar{y}} (g(\bar{x}, y) - F_y(\bar{x}, y)) dy.$$

4.8

Beispiel: $e^x + 3y + (3x + \cos y)y' = 0$.

$$f(x, y) = e^x + 3y, \quad g(x, y) = 3x + \cos y,$$

$$f_y = 3 = g_x.$$

$$H(x, y) = e^x + 3xy + K(y),$$

$$H_y = 3x + K_y = g = 3x + \cos y,$$

$$K = \sin y,$$

$$H(x, y) = e^x + 3xy + \sin y.$$

Der integrierende Faktor:

EULER'scher Multiplikator

Die DGL

$$y + 2xy' = 0$$

ist nicht exakt, da $f_y = 1$, $g_x = 2$.
Die Multiplikation mit y
liefert die exakte DGL

$$y^2 + 2xyy' = 0$$

mit $H(x, y) = xy^2$.

Eine Funktion $M \in C(D)$, $M \neq 0$, heißt integrierender Faktor bzgl. der DGL (4.1), wenn

$$(4.5) \quad M(x, y)f(x, y) + M(x, y)g(x, y)y' = 0$$

exakt ist. Für $M, f, g \in C^1(D)$ bedeutet dies dann nach (4.3) die Bedingung

$$(Mf)_y = (Mg)_x,$$

also

$$M_y f + M f_y = M_x g + M g_x.$$

M genügt einer partiellen DGL, und die Bestimmung ist im

allg. schwierig. Gelegentlich ist der Ansatz $M = M(x)$ bzw. $M = M(y)$ erfolgreich. Der Ansatz $M = M(x)$ führt auf

$$(4.6) \quad \frac{f_y - g_x}{g} = \frac{M'}{M} = (\ln M)'$$

Beispiel: Die DGL

$$\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$$

ist nicht exakt wegen

$$f_y = y + 2e^x, \quad g_x = e^x.$$

Der Ansatz (4.6)

$$\frac{f_y - g_x}{g} = \frac{y + e^x}{y + e^x} = 1 = \frac{M'}{M}$$

führt auf $M(x) = e^x$. Daher ist

$$\frac{1}{2} y^2 e^x + 2 y e^{2x} + e^x (y + e^x) y' = 0$$

exakt und die Lösungsmethode (4.4) liefert

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 e^x + y e^{2x} + K(y)$$

$$H_y = y e^x + e^{2x} + K_y = e^x (y + e^x)$$

$$K = 0,$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 e^x + y e^{2x}.$$

4.2 Zusammenhang mit ebenen autonomen Systemen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f, g \in C^1(D)$. Gegeben sei das System von DGL

(4.7)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Sei $x(t), y(t)$ eine Lösung von (4.7) in $I \subset \mathbb{R}$. Die Kurve $t \rightarrow (x(t), y(t))$ heißt Trajektorie von (4.7); der Graph $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ heißt Phasenporträt (orbit) von (4.7). Ein Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0$$

heißt singulärer Punkt oder Gleichgewichtspunkt. Eine Lösung der AWA

$$\dot{x} = f(x, y), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad y(t_0) = y_0$$

ist dann die stationäre Lösung

$$x(t) \equiv x_0, \quad y(t) \equiv y_0.$$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (6.9) in §6 folgert man

(4.8) Satz: Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung von (4.7) und sei (x_0, y_0) ein singulärer Punkt.

(i) Gilt $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ für ein t , so gilt dies für alle t , d.h. die Lösung ist stationär.

(ii) Gilt $(x(t), y(t)) \neq 0$ für ein t , so gilt dies für alle t .

Beispiel: Das System

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$$

besitzt den singulären Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und hat die Lösungen $x(t) = r \sin t, y(t) = r \cos t, r \in \mathbb{R}$, welche Kreise vom Radius $|r|$ parametrisieren. Die Lösungen verlaufen periodisch um den singulären Punkt.

Wir stellen nun den Zusammenhang des Systems (4.7) mit der DGL (4.1) her. Es gelte $\dot{x} = f(x, y) \neq 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion $t = t(x)$ zu $x = x(t)$. Für die Funktion $y(x) = y(t(x))$ folgt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

also ist die DGL

$$(4.9) \quad \boxed{f(x,y)y' - g(x,y) = 0}$$

erfüllt, welche gerade den Typ (4.1) hat. Ebenso gilt im Falle $y \cdot g(x,y) \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y \cdot f(x,y)}{g(x,y)}$$

$$(4.9a) \quad g(x,y) \frac{dx}{x} - f(x,y) \cdot dy = 0$$

Sei nun $H(x,y)$ eine Stammfunktion zu (4.9), d.h.

$$H_x = -g, \quad H_y = f \quad \text{in } D.$$

$$(4.10) \quad H_x f + H_y g = 0 \quad \text{in } D.$$

Dies besondere folgt hieraus

Genügt eine Funktion $H \in C^1(D)$ der Relation (4.10), so heißt

$H(x,y) = \text{const}$ ein erstes Integral

von (4.7).

(4.11) Satz: Sei $H(x,y) = \text{const}$ ein

erstes Integral von (4.7).

(1) Für jede Lösung $x(t), y(t)$

von (4.7) gilt

$$H(x(t), y(t)) = \text{const}.$$

(2) Jede Nullkurve, die nicht

durch einen singulären

Punkt geht und $(H_x, H_y) \neq 0$

erfüllt, ist eine Trajektorie.

Beweis: zu (1)

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x f + H_y g = 0.$$

zu (ii): vgl. Satz (11.8). ■

Bemerkung: Sei $M \in C^1(D)$ mit $M(x,y) \neq 0$. Genügt $H \in C^1(D)$ der Relation

$$H_x = -Mg, \quad H_y = Mf,$$

so ist $H(x,y) = \text{const.}$ ein erstes Integral; M heißt integrierender Faktor, vgl. (4.5).

Beispiel: Modell von LOTKA-VOLTERRA

Nach Beispiel 1.1(c) genügen die Beutepopulation $x(t)$ und die Räuberpopulation $y(t)$ den DGL

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) = ax - bxy, \\ \dot{y} &= g(x,y) = -cy + dxy. \end{aligned}$$

Die singulären Punkte mit $f=g=0$ sind

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right), \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Die zugehörige DGL (4.9)

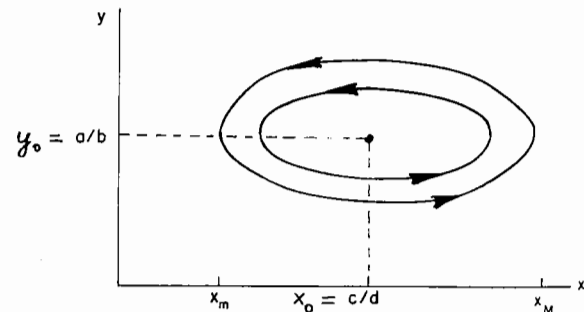
$$(ax - bxy)y' + (cy - dxy) = 0$$

hat den integrierenden Faktor $\frac{1}{xy}$,

$$\left(\frac{a}{y} - b \right) y' + \left(\frac{c}{x} - d \right) = 0,$$

mit dem ersten Integral

$$H(x,y) = a \ln y - by + c \ln x - dx = \text{const.}$$



Äquivalent hierzu ist

$$c \int \frac{y^a}{by} \cdot \frac{x^c}{dx} = \text{const.}$$

Durch eine elementare Diskussion der Funktionen $h_1(x) = x^c / e^{dx}$, $h_2(y) = y^a / e^{by}$ sieht man, daß die Niveaulinien von $H(x, y)$ geschlossene Kurven um den singulären Punkt $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ sind; vgl. BRAUN (1975), S. 589 ff.. Also sind die Lösungen von (4.12) periodisch. Ist $T > 0$ eine zugehörige Periode mit $x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$, so gilt für die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

Dies sieht man etwa so ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln x(T) - \ln x(0) \\ &= \int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^T (a - by(t)) dt \\ &= T(a - b\bar{y}). \end{aligned}$$

Also stimmen die Mittelwerte mit den Gleichgewichtswerten überein. Damit kann die anfangs gestellte Frage (vgl. Beispiel 1.1(c)) beantwortet werden, weshalb die reduzierte Fangintensität im 1. Weltkrieg den Räuberfischen $y(t)$ zugute kommt. Bei einer Fischfang-Intensität $\varepsilon > 0$ betrachtet man statt (4.12) das Modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy - \varepsilon x = (a - \varepsilon)x - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy - \varepsilon y = -(c + \varepsilon)y + dxy. \end{aligned}$$

Die Mittelwerte sind dann

$$\bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b}.$$

Eine Verkleinerung der Fangintensität ε reduziert die Anzahl der Beutefische (Kernige) und vergrößert die Anzahl der Räuberfische (Kare) im Mittel.

Weitere Anwendung:

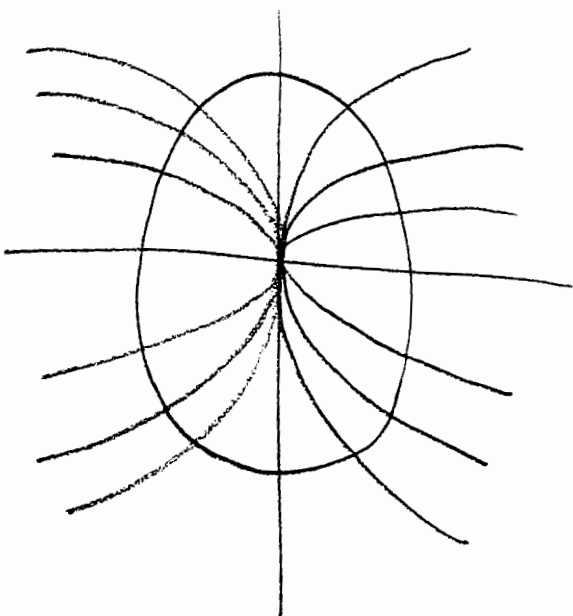
Orthogonaltrajektorien
(Hence, 39, 40, A.25, 118 ff)

Beispiel: Schar von Parabeln

$$y = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

Gesucht:

{ Kurve, welche
diese Schar
orthogonal
schneidet



DGL für Parabel-Schar:

$$y = cx^2 \Rightarrow c = c(x, y) = y/x^2$$

$$y' = 2cx = \frac{2y}{x^2} \cdot x = 2y/x = f(x, y)$$

Orthogonalchar:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} = -x/2y$$

$$\Rightarrow 2y dy + x dx = 0$$

$$2y^2 + x^2 = a^2 \quad \text{Ellipsen}$$

Allgemein: Kurvenalar

$$F(x, y, c) = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$c = c(x, y)$ durch Auflöserung

DGL für Skalar

$$F_x + F_y y' = 0 \quad \text{für } c = c(x, y)$$

$$y' = -F_x / F_y = f(x, y)$$

Orthogonalalar:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} = F_y / F_x \quad \text{für } c = c(x, y)$$

2. Beispiel:

$$F(x, y, c) = x^2 - y^2 - c = 0: \quad \text{Hyperbel}$$

$$2x - 2yy' = 0$$

$$y' = x/y$$

Orthogonalalar

$$y' = -y/x$$

$$xy = c \quad \text{Hyperbel}$$

§5 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

5.1 Normierte Räume

Es sei L ein linearer Raum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Eine Norm für L ist eine Abbildung $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \|0\| = 0, \quad \|x\| > 0 \quad \text{für } x \in L, x \neq 0, \\ \text{(Definitheit)}$$

$$(2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{für } x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{bzw. } \lambda \in \mathbb{C} \text{ (Homogenität)}$$

$$(3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für } x, y \in L, \\ \text{(Dreiecksungleichung).}$$

Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich insbesondere

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\|,$$

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Der Raum L mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt normierter Raum.

Beispiele:

(a) Der Raum \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n :

Der \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n kann auf verschiedene Weise normiert werden, z.B. durch

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

(Euklidische Norm).

Bekanntlich sind alle Normen für \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n äquivalent, d. h. zu zwei Normen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ gibt es Konstanten $c, d > 0$ mit

$$c \|x\|' \leq \|x\| \leq d \|x\|' \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Der Raum $C_m(G)$

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei

$$C_m(G) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ stetig} \},$$

$$C(G) = C_1(G),$$

der Raum der stetigen Funktionen. Die Menge $C_m(G)$ ist in natürlicher Weise ein linearer Raum über \mathbb{R} .

Als Norm kann man wählen

$$(5.1) \quad \|f\|_\infty := \max_{x \in G} \|f(x)\|$$

(Maximum-Norm)

mit irgendeiner Norm $\|\cdot\|$ des \mathbb{R}^m . Allgemeiner ist die bewichtete Maximum-Norm

$$(5.2) \quad \|f\|_w := \max_{x \in G} \|f(x)\| w(x),$$

wobei $w \in C(G)$ mit

$$0 < \alpha \leq w(x) \leq \beta < \infty, \quad x \in G,$$

ist.

5.2 Banach-Räume

Eine Folge $\{x_n\} \subset L$ konvergiert
(de: Norm nach) gegen $x \in L$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dafür schreibt man

$$x_n \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Eine Folge $\{x_n\}$ heißt Cauchy-
Folge, wenn gilt: zu jedem
 $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so daß

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ für } n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Ein normierter Raum L heißt
vollständig, wenn jede Cauchy-
Folge in L einen Grenzwert
in L besitzt. Bekanntlich

ist der \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n vollstän-
dig; jedoch ist nicht jeder
(unendlich-dim.) normierte
Raum vollständig.

Ein Banach-Raum ist ein
vollständiger linearer nor-
mierter Raum.

Beispiel: $C_n(G)$ mit der
Maximum-Norm

Eine Folge $\{f_n\} \subset C_n(G)$ ist
eine Cauchy-Folge bzgl. der Maxi-
mum-Norm $\|\cdot\|_\infty$, wenn

$$(*) \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

für $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ und alle $x \in G$.

Wegen der Vollständigkeit von
 \mathbb{R}^n gibt es also eine Funktion

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in G.$$

Aus (*) folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ und } x \in G.$$

Also ist die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent gegen f in G . Nach einem bekannten Satz ist dann die Grenzfunktion f stetig aufgrund der Kompaktheit von G . Daher ist $C_m(G)$ vollständig.

Diese Schlussweise ist auch für die gewichtete Norm $\|\cdot\|_w$ richtig, denn aus

$0 < \alpha \leq w(x) \leq \beta < \infty, x \in G,$
folgt die Normäquivalenz

$$\alpha \|f\|_\infty \leq \|f\|_w \leq \beta \|f\|_\infty.$$

5.3 Der Fixpunktsatz

Seien E, F normierte Räume über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Eine Abbildung $T: D \rightarrow F, D \subset E$, heißt Operator bzw. Funktional im Falle $F = \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} .

Der Operator $T: D \rightarrow F$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn aus $x_n \in D, x_n \rightarrow x_0$ folgt $Tx_n \rightarrow Tx_0$. T genügt in D einer Lipschitz-Bedingung (mit Lipschitz-Konstante q), wenn

$$(5.3) \quad \|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\|$$

für alle $x, y \in D$.

Man überlegt sofort, daß ein solcher Operator stetig in D ist. Im Falle $q < 1$ heißt T kontrahierend.

Beispiele:

(a) $I = [a, b]$, $D = E = C(I)$, $F = \mathbb{R}$.

Der Operator

$$Tx = \int_a^b x(t) dt$$

ist linear und genügt einer Lipschitz-Bedingung (5.3) mit $q = b - a$.

(b) Sei $I = [a, b]$, $D = E = F = C(I)$ und sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'(t)| \leq c$ für $t \in \mathbb{R}$. Für den

Operator

$$(Tx)(t) = \int_a^t f(x(s)) ds, \quad t \in [a, b],$$

berechnet man mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_a^t |f(x(s)) - f(y(s))| ds \\ &\leq \int_a^t c |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq c(b-a) \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Die Lipschitz-Bedingung für diesen Operator ist die Grundlage der Existenz und Eindeutigkeit von AWA in §6.

Sei B ein Banach-Raum und $T: D \rightarrow B$, $D \subset B$, ein Operator. Viele Existenzprobleme der Analysis lassen sich

in Form einer Fixpunkt-Gleichung

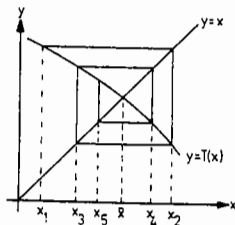
$$(5.4) \quad x = Tx, \quad x \in D,$$

schreiben. Ein solcher Punkt $x \in D$ heißt Fixpunkt von T . Zur Berechnung von Fixpunkten benutzt man das Iterationsverfahren

Start: $x_0 \in D$

$$(5.5) \quad \text{Iteration: } x_{k+1} = Tx_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Im Falle $B = \mathbb{R}$ kann man die Iteration anschaulich leicht verfolgen



(5.6) Fixpunktsatz: Sei D eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes B . Der Operator $T: D \rightarrow B$ habe die Eigenschaften

$$(1) \quad T(D) \subset D,$$

$$(2) \quad \|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\|$$

für $x, y \in D$, $q < 1$.

Dann hat die Gleichung $x = Tx$ genau eine Lösung $x = \bar{x} \in D$. Das Iterationsverfahren $x_{k+1} = Tx_k$ ($k \geq 0$) ist für alle $x_0 \in D$ konvergent gegen \bar{x} und es gilt die Abschätzung

$$\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x_1 - x_0\|.$$

5.13

Beweis: Wegen $T(D) \subset D$ ist die Iterationsfolge $x_{k+1} = Tx_k$ ($k \geq 0$), $x_0 \in D$, wohldefiniert. Zunächst beweisen wir mit Induktion die Abschätzung

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k \|x_1 - x_0\|, \quad k \geq 0.$$

Diese ist für $k=0$ richtig und sei für den Index k bewiesen. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \|x_{k+2} - x_{k+1}\| &= \|Tx_{k+1} - Tx_k\| \\ &\leq q \|x_{k+1} - x_k\| \leq q^{k+1} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung erhält man hieraus für $l > 0$ mit $q < 1$:

$$\|x_{k+l} - x_k\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \dots$$

5.14

$$\begin{aligned} &\leq (q^k + q^{k+1} + \dots + q^{k+l-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{q^k}{1-q} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Die Folge $\{x_n\}$ ist daher eine Cauchy-Folge und besitzt wegen der Vollständigkeit von B einen Grenzwert \bar{x} . Da D abgeschlossen ist, ist $\bar{x} \in D$. Vollzieht man in der obigen Abschätzung bei festem k den Grenzübergang $l \rightarrow \infty$, so erhält man die behauptete Abschätzung. Schließlich folgt die Eindeutigkeit von \bar{x} so: gilt $x = Tx$ und $y = Ty$, so ist

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\|, \quad q < 1,$$

also muß $\|x - y\| = 0$, d. h. $x = y$ gelten. \blacksquare

§ 6 Der Existenz- und Eindeutig-
keitssatz für Anfangs-
wertprobleme

Gegeben sei die AWA

$$(6.1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig
und $(t_0, x_0) \in D$. Sei $I = [a, b]$
ein Intervall mit $t_0 \in I$.

Jede Lösung $x(t)$ der AWA (6.1)
genügt der Integralgleichung

$$(6.2) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I,$$

und umgekehrt ist jede stetige
Lösung $x(t)$ von (6.2) schon

eine Lösung der AWA (6.1).

Die rechte Seite in (6.2)
definiert einen Operator

$$T: C_m(I) \rightarrow C_m(I)$$

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I.$$

Hierbei ist nach § 5

$$C_m(I) = \{x: I \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ stetig}\}$$

ein Banach-Raum mit der
bezeichneten Norm

$$\|x\| = \max_{t \in I} \{ \|x(t)\|_\infty e^{-\alpha t} \}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jeder Fixpunkt $x(\cdot)$ des Opera-
tors T ist dann Lösung der

AWA (6.1). Die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes folgt aus der Kontraktion von T . Zum Nachweis der Kontraktion benötigt man die folgende zentrale

(6.3) Definition:

(a) f genügt einer Lipschitz-Bedingung bzgl. x in D , wenn $L \geq 0$ existiert mit

$$\|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)\|_{\infty} \leq L \|\tilde{x} - x\|_{\infty}$$

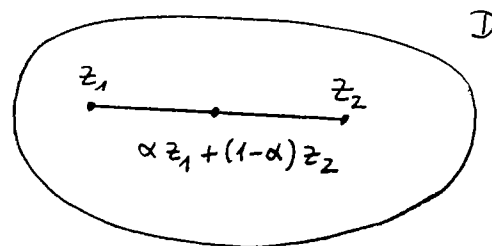
für alle $(t, \tilde{x}), (t, x) \in D$.

(b) f heißt lipschitz-stetig bzgl. x in D (lokale Lipschitz-Bedingung), wenn es zu jedem Punkt von D

eine Umgebung U gibt, so daß f einer Lipschitz-Bedingung bzgl. x auf $D \cap U$ genügt.

Die Lipschitz-Bedingung einer stetig differenzierbaren Funktion $f \in C_m^1(D)$ kann mittels der Ableitungen überprüft werden. Die Menge $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ heißt konvex, falls

$$\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 \in D \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in D, \alpha \in [0, 1].$$



(6.4) Satz: Kriterium für Lipschitz-Bedingung

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konvex und $f \in C_m^1(D)$. Dann ist f Lipschitz-stetig bzgl. x in D . Sind darüber hinaus die partiellen Ableitungen $\partial f_i / \partial x_j$ beschränkt in D , dann genügt f einer Lipschitz-Bedingung bzgl. x in D .

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)\|_\infty \\ & \leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \|f_x(t, \alpha x + (1-\alpha)\tilde{x})\|_\infty \|\tilde{x} - x\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $x, \tilde{x} \in D$, wobei

$$f_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Für jede (kompakte) Umgebung U eines Punktes $(t, x) \in D$ folgt dann

$$\|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)\|_\infty \leq L \|x - \tilde{x}\|_\infty,$$

$$L := \max_{(\tau, z) \in U} \|f_x(\tau, z)\|_\infty < \infty.$$

Sind die partiellen Ableitungen auf D beschränkt, so erhält man die Lipschitz-Bedingung auf ganz D mit

$$L := \sup_{(\tau, z) \in D} \|f_x(\tau, z)\|_\infty < \infty. \quad \blacksquare$$

Beispiele:

(1) Die Funktion $f(t, x) = \ln x$ genügt einer Lipschitz-Bedingung auf $D = \mathbb{R} \times [x_0, \infty]$ für $x_0 > 0$.
 f ist Lipschitz-stetig auf $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, genügt dort aber keiner Lipschitz-Bedingung.

(2) $f(t, x) = x^2$ genügt keiner Lipschitz-Bedingung auf dem Streifen $D = [a, b] \times \mathbb{R}$, aber f ist auf D Lipschitz-stetig.
 f genügt einer Lipschitz-Bedingung auf jedem Rechteck $D = [a, b] \times [c, d]$.

(6.5) Existenz- und Eindeutigkeitsatz:

Die Funktion f genüge auf dem Streifen $D = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$, $a > 0$,

einer Lipschitz-Bedingung bzgl. x . Dann gibt es genau eine Lösung $x(t)$ der AWA (6.1) in $I = [t_0, t_0 + a]$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß der Operator T ,

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

kontrahierend ist bzgl. einer Norm $\|x\| = \max\{\|x(t)\|_\infty e^{-\alpha t} \mid t \in I\}$.

Für $x, y \in C_n(I)$ gilt nun

$$\begin{aligned} & \| (Tx)(t) - (Ty)(t) \|_\infty \\ &= \left\| \int_{t_0}^t \{ f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \} ds \right\|_\infty \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\|_\infty ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|_{\infty} e^{-\alpha s} e^{\alpha s} ds \\
&\leq L \|x - y\| \int_{t_0}^t e^{\alpha s} ds \\
&\leq L \|x - y\| \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_{\infty} e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|.$$

Setzt man hierin $\alpha = 2L$, so erhält man die Kontraktion des Operators T

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Zum Nachweis der Existenz der Lösung $x(t)$ auf einem Intervall $I = [t_0 - a, t_0]$

links von t_0 muß man die Norm $\|x\| = \max \{ \|x(t)\|_{\infty} e^{\alpha t} \mid t \in I \}$, $\alpha = 2L$, nehmen.

Häufig genügt f nicht in einem ganzen Streifen $D = I \times \mathbb{R}^m$ einer Lipschitz-Bedingung, sondern nur auf einem Quader um (t_0, x_0) . Hierauf bezieht sich der

(6.6) Satz: Sei Q der Quader

$$Q = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_{\infty} \leq b\},$$

$a, b > 0,$

und $f \in C_m(Q)$ genüge auf Q einer Lipschitz-Bedingung bzgl. x . Dann existiert genau eine Lösung der AWA (6.1) (mindestens) in einem

Intervall $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$,
wobei

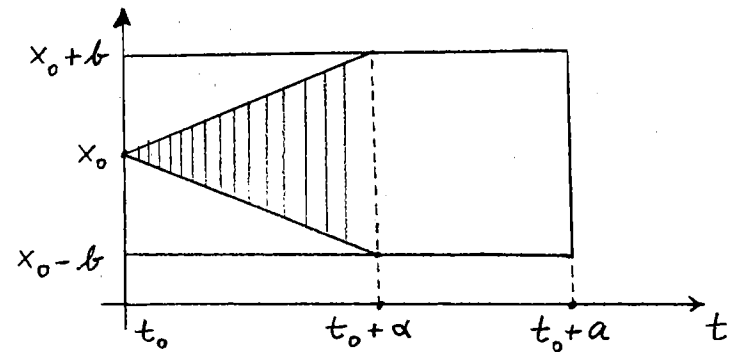
$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(t,x) \in Q} \|f(t,x)\|_{\infty}.$$

Beweis: Man führt die Beh. auf den vorigen Satz (6.5) zurück, indem man f auf dem Streifen $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ stetig fortsetzt zu einer Funktion \bar{f} mit (o. E. sei $n=1$)

$$\bar{f}(t,x) = \begin{cases} f(t, x_0 - b) & \text{für } x < x_0 - b \\ f(t, x) & \text{für } (t,x) \in Q \\ f(t, x_0 + b) & \text{für } x > x_0 + b \end{cases}$$

Diese Funktion \bar{f} genügt im Streifen D einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L von f . Die nach

Satz (6.5) existierende Lösung der AWA zu \bar{f} ist, solange sie in Q verläuft, auch Lösung der AWA zu f . Wegen $\|\bar{f}\|_{\infty} \leq M$ ist $|\dot{x}| \leq M$,



d. h. die Lösung verläuft im Winkelraum zwischen den beiden vom Punkt (t_0, x_0) ausgehenden Geraden mit der Steigung $\pm M$. Sie verlässt also Q frühestens an der Stelle $t = t_0 \pm a$ mit $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. ■

Beispiel: $Q = [0, 1] \times [0, 2]$, $a=1$, $b=1$,

$$\dot{x} = e^{-t^2} + x^3, \quad x(0) = 1.$$

Hier ist

$$M = \max_{(t,x) \in Q} (e^{-t^2} + x^3) = 1 + 2^3 = 9,$$

$$\alpha = \min\left(1, \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

Die Lösung existiert für $0 \leq t \leq 1/9$.

Der Fixpunktsatz (5.6)

zeigt darüber hinaus, daß die Lösung $x(t)$ der AWA (6.1)

Grenzwert der Folge $\{x^k(t)\}$ mit

$$x^{k+1}(t) = (Tx^k)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^k(s)) ds$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz ist. Z.B. gilt für die AWA

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1, \quad x(t) = e^t,$$

$$x^0(t) \equiv 1 : \text{"Startpunkt"},$$

$$x^1(t) = 1 + \int_0^t s ds = 1 + t,$$

$$x^2(t) = 1 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

Induktiv zeigt man

$$x^k(t) = \sum_{i=1}^k \frac{t^i}{i!} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} x(t) = e^t.$$

Aus Satz (6.6) gewinnt man das

(6.7) Korollar: Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und sei f stetig und Lipschitz-stetig bzgl. x auf D .
(i) Zu jedem Anfangswert $(t_0, x_0) \in D$ gibt es in einer Umgebung von t_0 genau eine Lösung der AWA (6.1).

(ii) Sind $x^1(t), x^2(t)$ zwei Lösungen der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ auf dem Intervall I und gilt $x^1(t_0) = x^2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so gilt $x^1(t) = x^2(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis zu (ii): Wir nehmen an, daß $t_1 \in I$ existiert mit $x^1(t_1) \neq x^2(t_1)$; o.E. sei $t_1 > t_0$. Aufgrund der Stetigkeit von $x^1(t), x^2(t)$ gibt es dann die größte Stelle $t^* \in [t_0, t_1]$ mit $x^1(t^*) = x^2(t^*)$, also gilt $x^1(t) \neq x^2(t)$ in $(t^*, t_1]$. Wendet man die Aussage (i) auf den Punkt $(t^*, x^1(t^*))$ an, so ergibt sich sofort ein Widerspruch zur letzten Aussage. ■

Über die Fortsetzbarkeit von Lösungen benötigen wir den unmittelbar einsichtigen

(6.8) Hilfssatz: Sei $f \in C_m(D)$.

(i) Ist $x(t)$ eine Lösung der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ im Intervall $a \leq t < b$, welche ganz in einer kompakten Menge $K \subset D$ verläuft, so läßt sich $x(t)$ auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ als Lösung fortsetzen mit $x(b) := \lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$.

(ii) Sind $x(t)$ bzw. $y(t)$ Lösungen der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ in $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ und gilt $x(b) = y(c)$, so ist die Funktion

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & a \leq t \leq b \\ y(t), & b \leq t \leq c \end{cases}$$

eine Lösung in $[a, c]$.

Damit erhalten wir den folgenden zentralen Satz:

(6.9) Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei D offen und sei $f \in C_m(D)$ Lipschitz-stetig bzgl. x in D . Dann hat für jedes $(t_0, x_0) \in D$ die AWA (6.1) eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ in einem maximalen Existenzintervall (t^-, t^+) , $-\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty$. $x(t)$ kommt nach links und nach rechts dem Rand von D beliebig nahe, d.h. (etwa für t^+) liegt einer der drei Fälle vor:

(1) $t^+ = \infty$,

(2) $t^+ < \infty$ und $\lim_{t \rightarrow t^+} \|x(t)\|_\infty = \infty$,

(3) $t^+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t^+} \rho(t, x(t)) = 0$,

$\rho(t, x(t))$: Abstand von $(t, x(t))$ zum Rand $\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$.

Alle Lösungen $x_I(t)$ von (6.1) in einem Intervall I mit $t_0 \in I$ sind Restriktionen von $x(t)$ auf I .

Beweis: Zu zeigen ist nur noch die Aussage (3). Sei G_+ der Graph von $x(t)$ für $t \geq t_0$. Dann sind die Aussagen (1)-(3) äquivalent zur Aussage

(4) G_+ ist keine kompakte Teilmenge von D .

Angenommen, (4) ist falsch. Die Fälle (1) und (2) mögen nicht vorliegen. Dann ist G_+

eine kompakte Teilmenge von D ,
 und $x(t)$ existiert in einem end-
 lichen Intervall $[t_0, t^+)$ oder
 $[t_0, t^+]$. Im ersten Fall läßt
 sich $x(t)$ nach Hilfssatz (6.8)(i)
 fortsetzen auf $[t_0, t^+]$. Im
 zweiten Fall kann man mit
 Korollar (6.7)(i) und (6.8)(ii)
 eine Fortsetzung von $x(t)$ auf
 ein Intervall $[t_0, t^+ + \varepsilon]$ be-
 stimmen. Dies steht im Wider-
 spruch zur Maximalität von t^+ . ■

Zur Verdeutlichung der
 Abhängigkeit der Lösung $x(t)$
 von den Anfangswerten schreiben
 wir auch

$$x(t) = x(t; t_0, x_0).$$

Ergänzungen:

Die Existenzaussage in Satz (6.9)
 gilt auch ohne die Lipschitz-
 -Stetigkeit von f auf D .

(6.10) Existenzsatz von PEANO

Sei D offen und $f \in C_m(D)$.
 Dann gibt es zu jedem Punkt
 $(t_0, x_0) \in D$ mindestens eine
 Lösung der AWA (6.1). Diese
 läßt sich nach links und
 nach rechts bis zum Rand
 von D fortsetzen.

Der Beweis kann auf den Fix-
 punktsatz von SCHAUDER
 zurückgeführt werden; vgl.
 WALTER, § 7.

Im den Anwendungen ist
 die rechte Seite $f(t, x)$ der DGL

nicht immer stetig in D . Sei $D = I \times \mathbb{R}^m$ ein Streifen und sei

$$L_m(I) = \{ h: I \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ meßbar und integrierbar in } I \},$$

$$L(I) = L_1(I).$$

Die Funktion f sei stetig in x für festes $t \in I$, und es gelte $f(\cdot, x) \in L_m(I)$ für festes $x \in \mathbb{R}^m$.

Ferner genüge f einer der beiden Voraussetzungen:

(a) Es gebe $h \in L(I)$ mit

$$\|f(t, x)\|_\infty \leq h(t) \text{ in } D;$$

(b) es gebe $h \in L(I)$ mit

$$\begin{aligned} \|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)\|_\infty \\ \leq h(t) \|\tilde{x} - x\|_\infty \text{ in } D. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine stetige Lösung

$x(t)$ von

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I,$$

für alle $(t_0, x_0) \in D$. Unter der Vor. (b) ist $x(t)$ eindeutig bestimmt. Die Lösung $x(t)$ ist dann totalstetig in I , d.h. es gilt

$$(6.11) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ fast überall in } I.$$

Dieser Lösungsbegriff hat Anwendungen in der Steuerungstheorie, wo dynamische Systeme der Form (1.13)

$$(6.12) \quad \dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

betrachtet werden. Hierbei ist $f: I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine

C^1 -Funktion und $u: I \rightarrow \mathbb{R}^m$
 eine stückweise stetige Steuerfunk-
 tion mit Unstetigkeitsstellen
 $t_i \in I, i=1, \dots, k$. Es ist dann
 (6.12) eine DGL vom Typ (6.11)

$$\dot{x} = \tilde{f}(t, x), \quad \tilde{f}(t, x) := f(t, x, u(t)),$$

und (6.11) besagt dann, daß gilt

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}.$$

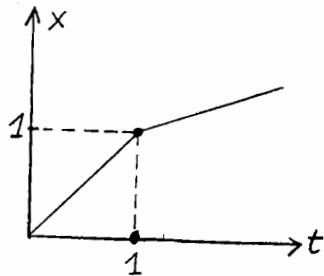
Beispielsweise ist die Lösung von

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq 1 \\ 1/2 & , 1 < t \end{cases}$$

gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 1/2(t+1) & , 1 < t \end{cases}$$



§ 7 Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Gegeben sei die AWA

$$(7.1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C_m(D)$ Lipschitz-stetig bzgl. x auf D ist.

Die Lösung der AWA soll stetig von den vorliegenden Daten, also von der rechten Seite der DGL und vom Anfangswert (t_0, x_0) , abhängen. Bei "kleiner" Änderung von rechter Seite und Anfangswert soll die Lösung sich nur "wenig" ändern. Mit derartigen Überlegungen gelangt man auch zu quantitativen Aussagen über die Lösung einer AWA. Es wird sich zeigen, daß bei

allen Aussagen über die Auswirkung gestörter Daten ein exponentielles Wachstum eine Rolle spielt. Dieses Wachstum beruht auf dem folgenden Hilfssatz über die Integration einer linearen Differentialungleichung.

(7.2) Hilfssatz: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien nicht-negative Funktionen $l, k \in C(I)$, $x \in C_m^1(I)$ gegeben mit

$$\|\dot{x}(t)\| \leq l(t)\|x(t)\| + k(t), \quad t \in I,$$

für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ des \mathbb{R}^m . Mit

$$L(t) := \left| \int_{t_0}^t l(s) ds \right|, \quad t_0 \in I,$$

besteht dann die Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq e^{L(t)} \left\{ \|x(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^t k(s) e^{-L(s)} ds \right| \right\}$$

für alle $t_0, t \in I$.

Beweis: Der Beweis wird nur für die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ geführt.

Für $\varepsilon > 0$ ist die positive Funktion

$$v_\varepsilon(t) = \left(\|x(t)\|_2^2 + \varepsilon \right)^{1/2} \\ = \left(\sum_{i=1}^n x_i(t)^2 + \varepsilon \right)^{1/2}$$

eine C^1 -Funktion. Die Differentiation ergibt

$$|v_\varepsilon(t) \dot{v}_\varepsilon(t)| = \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} (v_\varepsilon(t)^2) \right| \\ = \left| \sum_{i=1}^n x_i(t) \dot{x}_i(t) \right| \leq \|x(t)\|_2 \|\dot{x}(t)\|_2$$

mit der SCHWARZ'schen Ungleichung. Daraus folgt mit

$$\|x(t)\|_2 \leq v_\varepsilon(t) \quad \text{und der Vor.}$$

$$\|\dot{x}(t)\|_2 \leq l(t) \|x(t)\|_2 + k(t):$$

$$|v_\varepsilon(t) \dot{v}_\varepsilon(t)| \leq v_\varepsilon(t) (l(t) v_\varepsilon(t) + k(t)),$$

d.h.

$$|\dot{v}_\varepsilon(t)| \leq l(t) v_\varepsilon(t) + k(t),$$

und somit

$$\dot{v}_\varepsilon(t) - l(t) v_\varepsilon(t) \leq k(t),$$

$$\dot{v}_\varepsilon(t) + l(t) v_\varepsilon(t) \geq -k(t).$$

Für die Funktion

$$v_\varepsilon(t) e^{-L(t)}, \quad L(t) = \left| \int_{t_0}^t l(s) ds \right|$$

folgt dann wegen

$$-\dot{L}(t) = -l(t) \quad \text{für } t > t_0,$$

$$-L(t) = l(t) \text{ für } t < t_0$$

die Abschätzung

$$\frac{d}{dt} (v_\varepsilon(t) e^{-L(t)}) \leq k(t) e^{-L(t)}, \quad t > t_0,$$

$$\frac{d}{dt} (v_\varepsilon(t) e^{-L(t)}) \geq -k(t) e^{-L(t)}, \quad t < t_0.$$

Durch Integration ergibt sich

$$v_\varepsilon(t) e^{-L(t)} - v_\varepsilon(t_0) \leq \left| \int_{t_0}^t k(s) e^{-L(s)} ds \right|$$

für alle $t_0, t \in I$. Wegen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(t) = \|x(t)\|_2 \text{ für festes } t \in I$$

erhält man daraus die Beh. ■

(7.3) Korollar: Für eine Funktion $x \in C_n^1(I)$ gelte die Ungleichung

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha \|x(t)\| + \beta, \quad t \in I,$$

mit $\alpha, \beta \geq 0$. Dann besteht für alle $t_0, t \in I$ die Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq e^{\alpha|t-t_0|} \|x(t_0)\| + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha|t-t_0|} - 1).$$

Beweis: Im Hilfssatz (7.2) setze man $l(t) = \alpha$, $k(t) = \beta$, $L(t) = \alpha|t-t_0|$, und berechne

$$\left| \int_{t_0}^t \beta e^{-\alpha|s-t_0|} ds \right| = \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha|t-t_0|}). \quad \blacksquare$$

Die grundlegende Abschätzung über Näherungslösungen für die AWA (7.1) ist enthalten in

(7.4) Satz:

f genüge bzgl. x einer Lipschitz-Bedingung auf D mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Sei $x(t)$ die Lösung der AWA (7.1) in I und sei $z(t) \in C_m^1(I)$ eine Näherungslösung mit $(t, z(t)) \in D$ und

$$\|\dot{z}(t) - f(t, z(t))\| \leq \delta \quad \text{für } t \in I,$$

$$z(t_1) = z_1 \quad \text{für ein } t_1 \in I.$$

Sei

$M := \max \{ \|f(t, z(t))\| \mid t \in [t_0, t_1] \text{ oder } t \in [t_1, t_0] \}$. Dann gilt für $t \in I$

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \left\{ \|x_0 - z_1\| + |t_0 - t_1| \cdot (\delta + M) \right\} e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Beweis: O.E. sei $t_1 \leq t_0 \leq t$. Aus

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t) - \dot{z}(t)\| &= \|f(t, x(t)) - \dot{z}(t)\| \\ &\leq \|f(t, x(t)) - f(t, z(t))\| + \|f(t, z(t)) - \dot{z}(t)\| \\ &\leq L \|x(t) - z(t)\| + \delta \quad \text{auf } I \end{aligned}$$

folgt mit Korollar (7.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq e^{L|t-t_0|} \|x(t_0) - z(t_0)\| \\ &\quad + \frac{\delta}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \|x(t_0) - z(t_0)\| &= \|x(t_0) - z(t_1) - \int_{t_1}^{t_0} \dot{z}(s) ds\| \\ &\leq \|x(t_0) - z(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_0} \|\dot{z}(s)\| ds \\ &\leq \|x_0 - z_1\| + \int_{t_1}^{t_0} \left\{ \|\dot{z}(s) - f(s, z(s))\| \right. \\ &\quad \left. + \|f(s, z(s))\| \right\} ds \end{aligned}$$

$$\leq \|x_0 - z_1\| + |t_0 - t_1| (\delta + M),$$

woraus man die Beh. ableist. ■

(7.5) Satz über stetige Abhängigkeit:

Sei $x(t)$ die Lösung der AWA (7.1) auf dem kompakten Intervall I . Sei

$$D_\alpha := \{(t, x) \mid t \in I, \|x - x(t)\| \leq \alpha\}, \quad \alpha > 0,$$

eine Umgebung von $x(t)$ mit $D_\alpha \subset D$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß jede Lösung der "gestörten" AWA

$$\dot{z} = g(t, z), \quad z(t_1) = z_1,$$

mit $g \in C_m(D_\alpha)$ und

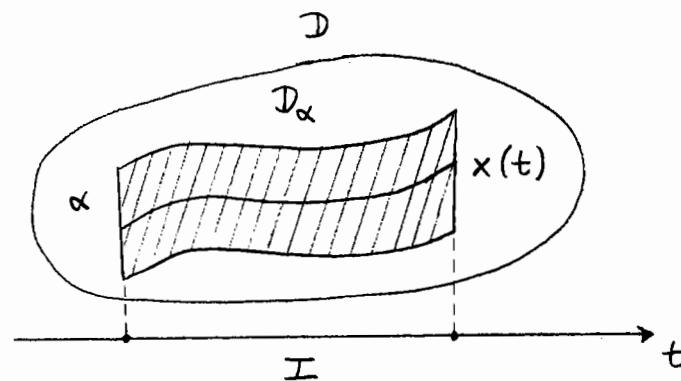
$$\|f(t, x) - g(t, x)\| < \delta \text{ in } D_\alpha,$$

$$\|x_0 - z_1\| < \delta, \quad |t_0 - t_1| < \delta,$$

in ganz I existiert mit

$$\|x(t) - z(t)\| < \varepsilon \text{ in } I.$$

Beweis: Wegen der Kompaktheit von D_α genügt f einer Lipschitz-Bedingung auf D_α mit $L \geq 0$.



Zu vorgegebenem $\delta > 0$ sei nun $z(t)$ eine Lösung der AWA

$$\dot{z} = g(t, z), \quad z(t_1) = z_1,$$

mit

$$\|f - g\| < \delta, \quad \|x_0 - z_1\| < \delta, \quad |t_0 - t_1| < \delta.$$

Solange $z(t)$ in D_α verläuft, gilt die Abschätzung in (7.4):

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \{\delta + \delta(\delta + M)\} e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Wegen der Kompaktheit von I kann man $\delta > 0$ so klein wählen, daß die rechte Seite kleiner als $\alpha/2$ ist. Dann kann $z(t)$ den Bereich $D_{\alpha/2}$ nicht verlassen. Da $z(t)$ dem Rand von D beliebig nahe kommt und $D_{\alpha/2} \subsetneq D_\alpha \subset D$ gilt, so existiert $z(t)$ in I und verläuft in D_α . Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist dann $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ wählbar mit $\|x(t) - z(t)\| < \varepsilon$. ■

(7.6) Beispiel: (vgl. auch WERNER / SCHABACK (1978), S. 264 ff)

Die RICCATI'sche AWA

$$\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0,$$

ist nicht elementar lösbar. Als Definitionsbereich wird man aufgrund von Satz (6.6) einen Quader

$$Q = [0, a] \times [0, aM] \subset \mathbb{R}^2$$

wählen mit geeigneten Größen a, M . Es soll

$$|f(t, x)| = |t^2 + x^2| \leq a^2 + a^2 M \leq M$$

gelten. Mit $M=1$ hat man $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu wählen. Die Lipschitz-Konstante L ist nach (6.4) das Maximum von

$$f_x(t, x) = 2x \quad \text{auf } Q,$$

also

$$L = \sqrt{2} \approx 1.414.$$

Als Näherungslösung $z(t)$ nehme man die Lösung der AWA

$$\dot{x} = t^2, \quad x(0) = 0,$$

also $z(t) = \frac{1}{3} t^3$. Die Konstante δ in Satz (7.4) berechnet sich mit

$$\begin{aligned} |f(t, z(t)) - \dot{z}(t)| &= |t^2 + z(t)^2 - \dot{z}(t)| \\ &= |z(t)^2| = \frac{1}{9} t^6 \end{aligned}$$

zu

$$\delta \leq \max_{t^2 \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{1}{9} t^6 \right| = \frac{1}{72} \approx 0.014.$$

Dies ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &\leq \frac{\delta}{L} (e^{L/\sqrt{2}} - 1) \\ &= \frac{1}{72 \cdot \sqrt{2}} (e - 1) \approx 0.017. \end{aligned}$$

Wegen $|z(t)| = \frac{1}{3} t^3 \leq 0.12$ für $t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ verläuft die Lösung $x(t)$ im Quader

$$Q_0 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \times [0, 0.14].$$

Mit der in Q_0 gültigen kleineren Lipschitz-Konstanten

$L_0 = \max 2x \leq 0.28$ kann man die Abschätzung verschärfen zu

$$\begin{aligned} |x(t) - \frac{1}{3} t^3| &\leq \frac{1}{72 \cdot 0.28} (e^{0.28/\sqrt{2}} - 1) \\ &\approx 0.011. \end{aligned}$$

Genauere Abschätzungen werden in Beispiel (7.17) angegeben.

Die auf 9 Stellen numerisch berechnete Lösung ist

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\ 106\ 781$$

$$\frac{1}{3} a^3 = 0.117\ 851\ 130$$

$$x(a) = 0.119\ 275\ 711$$

Für den exakten Fehler gilt also

$$|x(t) - \frac{1}{3}t^3| \leq 0.0015.$$

Die Lösung $x(t)$ der AWA (7.1) werde in Abhängigkeit von den Anfangswerten $(t_0, x_0) \in D$ bezeichnet mit

$$x(t; t_0, x_0).$$

Das zugehörige maximale Existenzintervall sei $I(t_0, x_0)$. Die Funktion $x(t; t_0, x_0)$ ist dann erklärt auf der Menge

$$S = \{(t, t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in D, t \in I(t_0, x_0)\}.$$

Aus den Sätzen (7.4), (7.5) erhalten

wir die

(7.7) Folgerung:

S ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{n+2} und $x(t; t_0, x_0)$ ist lipschitz-stetig bzgl. (t, t_0, x_0) auf S .

Unter stärkeren Forderungen an f gilt:

(7.8) Satz: Ist f eine C^k -Funktion in D ($k \geq 1$), so ist $x(t; t_0, x_0)$ eine C^k -Funktion in S .

Zum Beweis vergleiche man WALTER (1972) § 13; KNOBLOCH / KAPPEL (1974), Kap. III, § 3.2.

Die partiellen Ableitungen

$$y_i(t) := \frac{\partial}{\partial (x_0)_i} x(t; t_0, x_0), \quad i=1, \dots, n,$$

bzw.

$$y(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} x(t; t_0, x_0)$$

genügen der linearen AWA

$$(7.9) \quad \dot{y}_i = f_x(t, x(t; t_0, x_0)) y_i, \quad y_i(t_0) = e_i.$$

bzw.

$$(7.10) \quad \dot{y} = f_x(t, x(t; t_0, x_0)) y, \quad y(t_0) = -f(t_0, x_0).$$

Die AWA (7.9) erhält man, indem man die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t; t_0, x_0) &= f(t, x(t; t_0, x_0)) \\ x(t_0; t_0, x_0) &= x_0 \end{aligned}$$

nach $(x_0)_i$ partiell differenziert und die Vertauschbarkeit der

Ableitungen beachtet:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial (x_0)_i} x \right) = \frac{\partial}{\partial (x_0)_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} x \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial (x_0)_i} f(t, x(t; t_0, x_0)) = f_x \frac{\partial x}{\partial (x_0)_i} \\ &= f_x y_i. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man die AWA (7.10) durch Differentiation der Identität

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s; t_0, x_0)) ds$$

nach t_0 .

Die lineare DGL in (7.9), (7.10)

$$(7.11) \quad \dot{y} = A(t) y, \quad A(t) := f_x(t, x(t)),$$

heißt Variationsgleichung in Bezug auf eine feste Lösung $x(t) = x(t; t_0, x_0)$.

(7.12) Beispiel: Ein Variationsproblem

Gesucht ist eine C^1 -Funktion
 $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, welche das Integral

$$I(w, \dot{w}) = \int_0^1 h(w, \dot{w}) dt$$

$$:= \int_0^1 \frac{1}{2} \{w(t)^3 + \dot{w}(t)^2\} dt$$

minimiert unter den Randbedingungen

$$w(0) = 4, \quad w(1) = 1.$$

Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen (notwendige Optimalitätsbedingungen) für die minimierende Funktion ergeben das Randwertproblem (RWP)

$$\ddot{w} = \frac{d}{dt} h_{\dot{w}} = h_w = \frac{3}{2} w^2, \quad w(0) = 4,$$

$$w(1) = 1.$$

Zur Lösung dieses RWP berechnet man die Lösung $w(t, s)$ der AWA

$$\ddot{w} = \frac{3}{2} w^2, \quad w(0, s) = 4, \quad \dot{w}(0, s) = s,$$

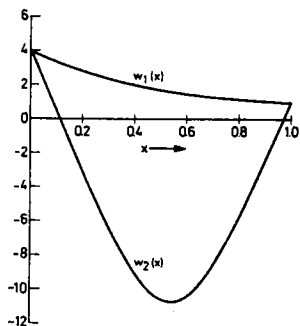
und bestimmt die Nullstellen der Funktion $F(s) := w(1, s) - 1$. Mit dem Schießverfahren (vgl. STOER/BULIRSCH, § 7.3.1) erhält man die Nullstellen

$$s_1 = -8.0, \quad s_2 = -35.858548$$

mit den zugehörigen Lösungen

$$w_1(t) := w(t, s_1) = \frac{4}{(1+t)^2},$$

$w_2(t) := w(t, s_2)$ geeignete elliptische Funktion.



Zur Entscheidung, ob $w_1(t)$ oder $w_2(t)$ das Integral $I(w, \dot{w})$ tatsächlich minimiert, muß man die zur AWA

$$\ddot{w} = \frac{3}{2} w^2, \quad w(0, s) = 4, \quad \dot{w}(0, s) = s$$

gehörenden Variationsgleichungen (7.9) bzgl. des Anfangswertes s betrachten. Diese lauten mit

$$y(t, s) := \frac{\partial}{\partial s} w(t, s)$$

in Bezug auf $w_k(t) = w(t, s_k), k=1, 2$:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t, s_k) &= 3 w_k(t) y(t, s_k), & (k=1, 2) \\ y(0, s_k) &= 0, \quad \dot{y}(0, s_k) = 1. \end{aligned}$$

Eine Nullstelle $t_c \in (0, 1]$ mit $y(t_c, s_k) = 0$ heißt konjugierter Punkt der Lösung $w_k(t)$. Ein Resultat der Variationsrechnung sagt aus, daß $w_k(t)$ minimal ist, wenn es keinen konjugierten Punkt $t_c \in (0, 1]$ gibt. Man kann zeigen, daß gilt

$$y(t, s_1) > 0 \quad \text{für } 0 < t \leq 1$$

$$y(t_c, s_2) = 0 \quad \text{für } t_c = 0.674437.$$

Also ist die Lösung $w_1(t)$ ein Minimum für $I(w, \dot{w})$, während $w_2(t)$ kein Minimum liefert und nur eine "stationäre Lösung" ist.

Aussagen über die Abhängigkeit der Lösung von Parametern

können auf die bisherigen Resultate zurückgeführt werden. Gegeben sei dazu eine Funktion

$$f(t, x, p) = (f_1(t, x, p), \dots, f_n(t, x, p))^T,$$

welche von einem Parameter $p \in \mathbb{R}^m$ abhängt; f sei auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$ eine C^k -Funktion ($k \geq 1$) bzgl. (t, x, p) . Dann hat die AWA

$$(7.13) \quad \dot{x} = f(t, x, p), \quad x(t_0) = x_0$$

bei festem p eine Lösung $x(t; t_0, x_0, p)$ für alle $(t_0, x_0, p) \in G$. Bei festem $p = p_0$ ist die AWA (7.13) äquivalent zu der AWA in den Variablen (x, p) :

$$(7.14) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, p), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = 0, & p(t_0) = p_0 \end{cases}$$

Jede Lösung x der AWA (7.13) mit $p = p_0$ läßt sich also mit den ersten n Komponenten einer Lösung von (7.14) identifizieren. Die rechte Seite $(f, 0)$ der DGL in (7.14) erfüllt die Voraussetzungen der Sätze (7.4), (7.5), (7.7); wir erhalten daher den

(7.15) Satz: Der Definitionsbereich S von $x(t; t_0, x_0, p)$ ist eine offene Menge des \mathbb{R}^{m+m+2} . $x(t; t_0, x_0, p)$ ist eine C^k -Funktion auf S .

Die partiellen Ableitungen

$$y_i(t) := \frac{\partial}{\partial p_i} x(t; t_0, x_0, p), \quad i=1, \dots, m,$$

genügen der linearen AWA

$$(7.16) \quad \begin{cases} \dot{y}_i = f_x(t, x(t; t_0, x_0, p), p) y_i \\ \quad + f_p(t, x(t; t_0, x_0, p), p), \\ y_i(t_0) = 0. \end{cases}$$

Diese erhält man durch Differentiation bzgl. p der Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t; t_0, x_0, p) &= f(t, x(t; t_0, x_0, p), p) \\ x(t_0; t_0, x_0, p) &= x_0. \end{aligned}$$

(7.17) Beispiel: Fortsetzung Beispiel (7.6)

Gegeben sei die parameterabhängige AWA

$$\dot{x} = t^2 + px^2, \quad x(0) = 0.$$

Für $p=1$ stellt dies gerade die AWA in (7.6) dar. Die Lösung $x(t; p)$ der obigen AWA ist nach Satz (7.15) eine C^∞ -Funktion auf einer Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$. Für

$$y(t; p) := \frac{\partial}{\partial p} x(t, p)$$

$$z(t; p) := \frac{\partial^2}{\partial p^2} x(t, p) = \frac{\partial}{\partial p} y(t, p)$$

erhält man mit (7.16) und einer weiteren Differentiation nach p die AWA

$$\dot{y}(t, p) = 2px(t, p)y(t, p) + x(t, p)^2,$$

$$y(0, p) = 0,$$

$$\dot{z}(t, p) = 4x(t, p)y(t, p) + 2p(y(t, p))^2 + x(t, p)z(t, p),$$

$$z(0, p) = 0.$$

Für $p=0$ hat man die Lösung

$$x(t,0) = \frac{1}{3} t^3.$$

Die zugehörigen AWA

$$\dot{y} = \frac{1}{9} t^6, \quad y(0,0) = 0$$

$$\dot{z} = \frac{4}{3} t^3 y(t,0), \quad z(0,0) = 0$$

haben die Lösungen

$$y(t,0) = \frac{1}{63} t^7,$$

$$z(t,0) = \frac{4}{11 \cdot 189} t^{11}.$$

Daher gilt für die Lösung $x(t,p)$ eine Entwicklung in p der Form

$$x(t,p) = x(t,0) + p y(t,0) + \frac{1}{2} p^2 z(t,0) + O(p^3)$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + p \frac{1}{63} t^7 + p^2 \frac{2}{11 \cdot 189} t^{11} + O(p^3)$$

bei festem t . Für $p=1$ gewinnt man daraus eine verbesserte Schätzung für die Lösung der RICCATI'schen AWA $\dot{x} = t^2 + x^2, x(0) = 0$. In $t=a = 1/\sqrt{2}$ berechnet man

		Fehler
$x(a,0)$	0.117 851 130	$1.5 \cdot 10^{-3}$
$x(a,0) + y(a,0)$	0.119 254 119	$2 \cdot 10^{-5}$
$x(a,0) + y(a,0) + \frac{1}{2} z(a,0)$	0.119 275 377	$4 \cdot 10^{-7}$
$x(a,1)$ exakt	0.119 275 711	

Der Fehler bei der Entwicklung 2. Ordnung ist beinahe im Rahmen der Rechengenauigkeit der exakten Lösung!

§ 8 Lineare DGL8.1 Allgemeine Aussagen

Unter einer inhomogenen linearen DGL versteht man das System von DGL

$$(8.1) \quad \boxed{\dot{x} = A(t)x + b(t)}$$

mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$b(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))^T.$$

Die Funktionen $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) sind reell- bzw. komplexwertig und seien stetig auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Die zugehörige homogene DGL lautet

$$(8.2) \quad \dot{x} = A(t)x.$$

Im folgenden sei $\|\cdot\|$ irgend-eine Vektornorm des \mathbb{R}^n sowie eine damit verträgliche Matrixnorm.

(8.3) Existenz-, Eindeutigkeits- und Abschätzungssatz:

Die AWA

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

hat für alle $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($x_0 \in \mathbb{C}^n$) eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$ in I .

Genauer
I₀?

Ist $I_0 \subset I$ ein Teilintervall mit $t_0 \in I_0$ und

$$\|A(t)\| \leq L, \quad \|b(t)\| \leq \delta \quad \text{in } I_0,$$

so besteht die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1)$$

in I_0 .

In jedem kompakten Teilintervall $I_0 \subset I$ hängt $x(t)$ stetig von $A(t), b(t)$ ab: zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\beta = \beta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\|x(t) - z(t)\| < \varepsilon \quad \text{in } I_0,$$

wenn $z(t)$ eine Lösung der AWA

$$\dot{z} = B(t)z + c(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

(B, c stetig in I_0) ist mit

$$\|B(t) - A(t)\| < \beta,$$

$$\|b(t) - c(t)\| < \beta \quad \text{in } I_0,$$

$$\|x_0 - z_0\| < \beta.$$

Beweis: Auf jedem kompakten Intervall $I_0 \subset I$ gilt wegen der Stetigkeit von $A(t), b(t)$ eine Abschätzung

$$\|A(t)\| \leq L, \quad \|b(t)\| \leq \delta \quad \text{in } I_0.$$

Die Funktion $f(t, x) = A(t)x + b$ genügt dann auf $D = I_0 \times \mathbb{R}^n$ bzw. $D = I_0 \times \mathbb{C}^n$ einer Lipschitz-Bedingung (6.3)

$$\begin{aligned} \|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)\| &= \|A(t)(\tilde{x} - x)\| \\ &\leq \|A(t)\| \|\tilde{x} - x\| \leq L \|\tilde{x} - x\| \end{aligned}$$

für alle $(t, x), (t, \tilde{x}) \in D$. Nach dem Existenzsatz (6.5) existiert dann genau eine Lösung $x(t)$ in I_0 . Ferner erfüllt die Funktion $z(t) \equiv 0$ die Abschätzung

$$\|\dot{z} - f(t, z)\| = \|b(t)\| \leq \delta,$$

$$\|z_0 - x_0\| = \|x_0\|.$$

Satz (7.4) ergibt dann die gewünschte Abschätzung. Dies gilt für alle kompakten Teilintervalle $I_0 \subset I$, also kann die Lösung $x(t)$ auf I fortgesetzt werden.

Nun sei für $I_0 \subset I$ kompakt die Beziehung

$$\|B(t) - A(t)\| < \beta, \quad \|b(t) - c(t)\| < \beta$$

in I_0 ,

$$\|x_0 - z_0\| < \beta$$

erfüllt mit $\beta \leq 1$. Für eine Konstante c ist

$$\|B(t)\| \leq c, \quad \|c(t)\| \leq c, \quad \|z_0\| \leq c.$$

Für die Lösung $z(t)$ der AWA $\dot{z} = B(t)z + c$, $z(0) = z_0$, gilt dann eine Abschätzung $\|z(t)\| \leq c_1$ in I_0 . Wir wenden nun die Abschätzung in Satz (7.4) auf die Lösungen $x(t)$, $z(t)$ an. Für $f(t, x) = Ax + b$ ist

$$\begin{aligned} \|\dot{z} - f(t, z)\| &= \|(B-A)z + c - b\| \\ &\leq \|B-A\| \|z\| + \|c-b\| \\ &\leq \beta(1+c_1). \end{aligned}$$

Die Abschätzung in (7.4) gilt dann mit $\delta = \beta(1+c_1)$, $t_0 = t_1$

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \beta e^{L|t-t_0|} + \frac{\beta(1+c_1)}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1),$$

und dies ist kleiner als ε in I_0 für β hinreichend klein. ■

Es bezeichne

$R(b)$: Menge der Lösungen $x(\cdot)$ der inhomogenen DGL,

$R(0)$: Lösungen der homogenen DGL.

Wegen der Linearität der DGL hat man das

Superpositionsprinzip:

$$R(\alpha b + \beta c) = \alpha R(b) + \beta R(c)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b, c \in C_m(I)$,

$$R(b) = x_0(\cdot) + R(0)$$

für jede Lösung $x_0(\cdot) \in R(b)$.

Für die zweite Aussage hat man lediglich zu beachten, daß

$$x(\cdot) - x_0(\cdot) \in R(b - b) = R(0)$$

für alle $x(\cdot), x_0(\cdot) \in R(b)$.

Zu untersuchen bleibt nun der Raum $R(0)$ der homogenen Lösungen.

Man nennt k Lösungen $x^1(\cdot), \dots, x^k(\cdot)$ linear abhängig, wenn $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) existieren mit $|c_1| + \dots + |c_k| > 0$ und

$$c_1 x^1(t) + \dots + c_k x^k(t) = 0 \text{ für } t \in I.$$

Andernfalls heißen $x^1(\cdot), \dots, x^k(\cdot)$ linear unabhängig.

(8.4) Satz:

Der Raum $R(0)$ der Lösungen des homogenen Systems ist ein n -dim. linearer Raum über \mathbb{R} (bzw. über \mathbb{C}). Für festes $t_0 \in I$ wird durch

$$a \rightarrow x(\cdot; t_0, a), \quad a \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$$

ein Isomorphismus
zwischen \mathbb{R}^m (bzw. \mathbb{C}^m)
und $R(0)$ definiert.

Beweis: Die Abbildung

$$L: \mathbb{R}^m \text{ (bzw. } \mathbb{C}^m) \rightarrow R(0)$$

$$a \rightarrow x(\cdot, t_0, a)$$

ist linear und surjektiv auf-
grund des Existenzsatzes (8.3).

Wegen der Eindeutigkeit folgt
 $\text{Ke}(L) = \{0\}$, also ist L auch
injektiv. \blacksquare

(8.5) Folgerung: Sei $t_0 \in I$.

$\{a^1, \dots, a^n\}$ ist genau dann
eine Basis des \mathbb{R}^m (bzw. \mathbb{C}^m),
wenn die Funktionen
 $x^i(\cdot) = x^i(\cdot; t_0, a^i)$, $i=1, \dots, m$,
eine Basis von $R(0)$ sind.

Gegeben sei ein komplexes System

$$(8.6) \quad \dot{z} = B(t)z + b(t),$$

wobei

$$z = x + iy \in \mathbb{C}^m, \quad B(t) = C(t) + iD(t),$$

$$b(t) = c(t) + id(t).$$

Daraus erhält man für Real-
und Imaginärteil das System
von $2m$ DGL

$$\dot{x} = C(t)x - D(t)y + c(t)$$

$$\dot{y} = D(t)x + C(t)y + d(t),$$

also

$$(8.6a) \quad \begin{array}{l} \dot{u} = A(t)u + a(t), \\ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} C(t) & -D(t) \\ D(t) & C(t) \end{pmatrix}, \\ a(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Daher gilt $\dim_{\mathbb{C}} R(0) = n$,
 $\dim_{\mathbb{R}} R(0) = 2n$.

8.2 Die homogene DGL. Fundamentalmatrix

Jedes System von n linear unabhängigen Lösungen $x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)$ des homogenen Systems

$$(8.2) \quad \dot{x} = A(t)x$$

heißt Fundamentalsystem.

Die (n, n) -Matrix

$$\phi(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$$

heißt Fundamentalmatrix;

diese genügt der DGL

$$(8.7) \quad \dot{X} = A(t)X, \quad X(t) \text{ } (n, n)\text{-Matrix.}$$

Die Fundamentalmatrix
 $\phi(t, t_0)$ mit

$$\phi(t_0, t_0) = E \text{ Einheitsmatrix}$$

heißt Übergangsmatrix. Die Spalten $x^i(t)$ von $\phi(t, t_0)$ genügen der AWA

$$\dot{x}^i = A(t)x^i, \quad x^i(t_0) = e_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Beispiel: Ein Fundamentalsystem
 zu

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

ist

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$\phi(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(8.8) Satz: Ist

$$\phi(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

eine Fundamentalmatrix
und $x(t)$ eine Lösung von
(8.2), so gibt es

$$c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ mit}$$

$$x(t) = \phi(t)c = c_1 x^1(t) + \dots + c_n x^n(t).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_0) &= \phi(t, t_0) x_0, \\ \phi(t, t_0) &= \phi(t) \phi(t_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis: Zu $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ gibt
es wegen $\det(\phi(t_0)) \neq 0$ ein $c \in \mathbb{R}^n$
mit

$$x_0 = \phi(t_0)c, \quad c = \phi(t_0)^{-1} x_0.$$

Da $\phi(t)c$ und $\phi(t, t_0)c$ Lösungen

der AWA $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$, sind,
so hat man

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_0) &= \phi(t)c = \phi(t) \phi(t_0)^{-1} x_0 \\ &= \phi(t, t_0) x_0 \text{ für alle } t \in I. \blacksquare \end{aligned}$$

Damit gewinnt man die
folgenden Eigenschaften der Über-
gangsmatrix

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \phi(t, t_1) \phi(t_1, t_0) &= \phi(t, t_0), \\ \phi(t, t_0)^{-1} &= \phi(t_0, t). \end{aligned}$$

Für eine Lösung $X(t)$ von (8.7)

heißt

$$W(t) = \det X(t)$$

die WRONSKI-Determinante.

(8.10) Satz: Es gilt die Beziehung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{spur } A(s) ds\right),$$

$t, t_0 \in I,$

$$\text{spur } A(s) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(s).$$

Beweis: Mit $X(t) = (x_{ij}(t))$ gilt

$$W(t) = \det X(t)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) x_{1,\sigma(1)}(t) \cdot \dots \cdot x_{n,\sigma(n)}(t).$$

Damit wird

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{W}_i(t),$$

$W_i(t)$: ersetze $x_{ij}(t)$ ($j=1, \dots, n$) durch $\dot{x}_{ij}(t)$.

Wegen

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_{kj}$$

ist die i -te Zeile in $W_i(t)$ eine Linear-Kombination der übrigen Zeilen mit Koeffizient $a_{ik}(t)$.

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt damit

$$W_i(t) = a_{ii}(t) W(t),$$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{W}_i(t) = \text{spur } A(t) \cdot W(t). \quad \blacksquare$$

Die lineare DGL

$$\dot{x} = -A(t)^T x \quad (T: \text{Transponierung}) \quad (8.11)$$

heißt die zu $\dot{x} = A(t)x$ adjungierte DGL. Eine Fundamentalmatrix $\phi(t)$ von $\dot{x} = A(t)x$ genügt der Beziehung

$$0 = \frac{d}{dt} (\phi(t) \phi(t)^{-1}) = \dot{\phi} \phi^{-1} + \phi (\dot{\phi}^{-1}),$$

also

$$\begin{aligned}(\phi(t)^{-1})' &= -\phi(t)^{-1} \dot{\phi}(t) \phi(t)^{-1} \\ &= -\phi(t)^{-1} A(t)\end{aligned}$$

wegen $\dot{\phi} = A(t)\phi$. Daher ist

$$\Psi(t) := (\phi(t)^T)^{-1}$$

eine Fundamentalmatrix der adjungierten DGL (8.11). Für die Übergangsmatrix von (8.11) hat man wegen (8.9)

$$\Psi(t, t_0) = (\phi(t, t_0)^T)^{-1} = \phi(t_0, t)^T.$$

8.3 Koordinatentransformation. Variation der Konstanten.

Sei $C(t)$ eine reguläre, stetig differenzierbare (n, n) -Matrix auf I . Wenn $x(t)$ Lösung der inhomogenen DGL (8.1) ist,

dann genügt die transformierte Funktion

$$y(t) = C(t)x(t), \quad t \in I,$$

der DGL

$$\begin{aligned}\dot{y} &= C(t)\dot{x} + \dot{C}(t)x \\ &= C(t)(A(t)C(t)^{-1}y + b(t)) + \dot{C}(t)C(t)^{-1}y,\end{aligned}$$

d. h.

$$(8.12) \quad \boxed{\dot{y} = (C(t)A(t) + \dot{C}(t))C(t)^{-1}y + C(t)b(t)}$$

Speziell für konstante Matrizen $A(t) = A$, $C(t) = C$ hat man

$$(8.12a) \quad \dot{y} = CAC^{-1}y + Cb.$$

Die DGL (8.12) vereinfacht sich, wenn $C(t)$ die lineare DGL

$$\dot{C} = -CA(t)$$

erfüllt. Hierfür gilt

$$C'(t) = \phi(t)^{-1}$$

und (8.12) reduziert sich auf

$$\dot{y} = \phi(t)^{-1} b(t)$$

mit der Lösung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} b(s) ds, \quad y(t_0) = y_0.$$

Es besteht die Beziehung

$$x(t) = C(t)^{-1} y(t) = \phi(t) y(t),$$

$$x_0 = \phi(t_0) y_0.$$

Für $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ ist dann die Lösung $x(t; t_0, x_0)$ gegeben durch

$$(8.13) \quad \begin{aligned} x(t; t_0, x_0) &= \phi(t) \left\{ \phi(t_0)^{-1} x_0 \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} b(s) ds \right\} \\ &= \phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, s) b(s) ds \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Fundamentalmatrix $\phi(t)$.

Die Methode der Variation der Konstanten zur Herleitung von (8.13) geht von dem Ansatz

$$x(t) = \phi(t) c(t) \quad (\text{vgl. Satz (8.8)})$$

aus. Die unbekannte Funktion $c(t)$ genügt wegen

$$\dot{x} = \dot{\phi} c + \phi \dot{c} = A \phi c + \phi \dot{c} = Ax + b$$

der DGL $\phi \dot{c} = b$, also

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} b(s) ds, \quad c_0 = \phi(t_0)^{-1} x_0,$$

woraus sich ebenfalls (8.13) ergibt.

§9 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Zu einer reellen oder komplexen (n, n) -Matrix A betrachten wir die homogene DGL

$$(9.1) \quad \dot{x} = Ax.$$

9.1 Exponentialreihe und Fundamentallösung

Die Reihe

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$$

heißt Matrixexponentialreihe.

Diese existiert für alle (n, n) -Matrizen A , da

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \|E\| - 1 + e^{\|A\|}$$

eine (absolut konvergente) Majorante besitzt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert daher auch die Reihe

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

gleichmäßig. Die Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion übertragen sich weitgehend.

(9.2) Hilfssatz: Es ist

$$(a) \quad e^{A+B} = e^A \cdot e^B, \text{ falls } AB=BA,$$

$$(b) \quad (e^A)^{-1} = e^{-A},$$

$$(c) \quad C e^A C^{-1} = e^{C A^{-1} C}, \text{ falls } \det C \neq 0,$$

$$(d) \quad e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Die Reihe e^{At} kann wegen der

gleichmäßigen Konvergenz gliedweise differenziert werden:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A e^{At}.$$

Also ist

$$\phi(t) = e^{At} \text{ bzw. } \phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

eine zu $\dot{x} = Ax$ gehörige Fundamentallösung bzw. Übergangsmatrix.

Die Lösung der inhomogenen A/A

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

lautet dann nach (8.13)

$$(9.3) \quad x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} b(s) ds.$$

Die Lösung $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$

der homogenen DGL soll nun explizit mit Hilfe der Eigenwerte λ_i von A berechnet werden.

9.2 Exponentialansatz.

Eigenvektoren

Motiviert durch den skalaren Fall in §3 sucht man eine explizite Lösung der DGL $\dot{x} = Ax$ in der Form

$$(9.4) \quad x(t) = e^{\lambda t} c, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

In die DGL eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{\lambda t} \lambda c \\ &= Ax = e^{\lambda t} A c. \end{aligned}$$

$x(t)$ ist genau dann Lösung, wenn

$$Ac = \lambda c, \quad \text{d.h. } (A - \lambda E)c = 0.$$

Also ist $c \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor
zum Eigenwert λ von A ; λ ist
Nullstelle des charakteristischen
Polynoms

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

(9.5) Satz: (Komplexer Fall)

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte von
 A mit zugehörigen Eigenvek-
toren c_1, \dots, c_k . Die Lösungen

$$x^i(t) = e^{\lambda_i t} c_i, \quad i = 1, \dots, k$$

von (9.1) sind genau dann
linear unabhängig, wenn
die Vektoren c_i linear un-
abhängig sind. Insbesondere
sind diese linear unab-
hängig, wenn die Eigenwerte

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschieden sind.
Besitzt also A n linear
unabhängige Eigenvektoren,
so erhält man auf diese
Weise ein Fundamentall-
system von Lösungen.

Beweis: Die Folgerung (8.5) sagt
aus, daß $x^1(t), \dots, x^k(t)$ genau dann
linear unabhängig sind, wenn
 $x^i(0) = c_i$, $i = 1, \dots, k$, linear un-
abhängig sind. Aus der Linearen
Algebra ist bekannt, daß
 c_1, \dots, c_k linear unabhängig
sind, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschie-
den sind. ■

(9.6) Folgerung: Hat die reelle
Matrix A n verschiedene

reelle Eigenwerte λ_i , so bilden $x^i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$, $i=1, \dots, n$, ein reelles Hauptsystem.

Die Schwierigkeit bei reellen Systemen besteht darin, daß die reelle Matrix A komplexe Eigenwerte λ und Eigenvektoren c besitzen kann. In der Darstellung

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + i\beta, \quad c = a + ib, \\ z(t) &= e^{\lambda t} c \\ &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (a + ib) \\ &= e^{\alpha t} \{ a \cos \beta t - b \sin \beta t + \\ &\quad + i (a \sin \beta t + b \cos \beta t) \} \end{aligned}$$

sind dann

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}(z(t)) = e^{\alpha t} (a \cos \beta t - b \sin \beta t) \\ (9.7) \quad y(t) &= \operatorname{Im}(z(t)) = e^{\alpha t} (a \sin \beta t + b \cos \beta t) \end{aligned}$$

reelle Lösungen. Man beachte, daß mit $Ac = \lambda c$, A reell, auch gilt

$$A\bar{c} = \bar{\lambda}\bar{c}, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \bar{c} = a - ib.$$

Man erhält daher zum konjugiert komplexen Eigenwert $\bar{\lambda}$ dieselben Lösungen (9.7).

(9.8) Satz: (Reeller Fall)

Bildet man zu $2k$ verschiedenen komplexen Eigenwerten

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{2k} = \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k$$

die $2k$ reellen Lösungen

$$x^i(t) = \operatorname{Re}(e^{\lambda_i t} c_i), \quad y^i(t) = \operatorname{Im}(e^{\lambda_i t} c_i)$$

und zu q verschiedenen reellen

Eigenwerten λ_i ($i=2k+1, \dots, 2k+q$) die q reellen Lösungen $e^{\lambda_i t} c_i$, so sind diese $2k+q$ Lösungen linear unabhängig. Falls einige der λ_i gleich sind und die $2k+q$ zugehörigen Eigenvektoren c_i l. u. sind, so sind die $2k+q$ Lösungen l. u..

Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = Ax,$$

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2),$$

Die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2$$

sind reell und verschieden. Mit

den zugehörigen Eigenvektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat man das Fundamentalsystem

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\textcircled{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = Ax,$$

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2),$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\beta, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\beta, \quad \beta = \sqrt{7}/2,$$

$$\lambda_3 = 1.$$

Die zu λ_1, λ_2 gehörigen komplexen Eigenvektoren sind

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\beta \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \overline{c_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\beta \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

der reelle Eigenvektor zu λ_3 ist

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Aufspaltung von

$$z(t) = e^{(-\frac{1}{2} + i\beta)t} c_1$$

in Real- und Imaginärteil erhält man mit (9.7)

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos \beta t - \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \beta t \right],$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \beta t + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin \beta t \right].$$

Diese bilden zusammen mit

$$x^3(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem.

9.3 Exponentialansatz: Hauptvektoren

Im dem Falle, daß A nicht n l. u. Eigenvektoren c_i besitzt, muß man auf Hauptvektoren zurückgreifen. Sei λ ein Eigenwert von A . Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet dann mit $c \in \mathbb{C}^n$:

$$(9.9) \quad x(t) = e^{At} c = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda E)t} c.$$

Falls c die Gleichung

$$(A - \lambda E)^m c = 0 \quad (m \geq 1)$$

$m=1$: c Eigenvektor zu λ ,

$m \geq 2$: c Hauptvektor zu λ ,

erfüllt, so erhält man in (9.9) die abbrechende Reihe

$$(9.10) \quad e^{(A-\lambda E)t} c = c + t(A-\lambda E)c + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A-\lambda E)^{m-1} c.$$

Für $m=1$ stellt (9.9) gerade die Lösung (9.4) dar.

Aus der Linearen Algebra sind die folgenden Zerlegungen bekannt:

$$P_m(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda-\lambda_k)^{\nu_k},$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ verschiedene Eigenwerte,

$\nu_i \geq 1$: algebraische Vielfachheit, $\nu_1 + \dots + \nu_k = n$,

$$\mathbb{C}^n = \ker(A-\lambda_1 E)^{\nu_1} \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_k E)^{\nu_k},$$

$\dim \ker(A-\lambda_i E)^{\nu_i} = \nu_i$, $i=1, \dots, k$.

Die Hauptvektoren c der Stufe $m=1, 2, \dots, \nu_i$ ($i=1, \dots, k$) berechnet

man sukzessiv aus

$$(9.11) \quad \begin{aligned} (A-\lambda_i)^j c &\neq 0, \quad j=0, \dots, m-1, \\ (A-\lambda_i)^m c &= 0. \end{aligned}$$

Diese so erhaltenen n Hauptvektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von \mathbb{C}^n . Mit (9.9), (9.10) ergibt sich dann ein Fundamentalsystem mit Lösungen der Form

$$(9.12) \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_i t} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{t^\nu}{\nu!} (A-\lambda_i E)^\nu c \\ &\quad (i=1, \dots, k, \quad m=1, \dots, \nu_i). \end{aligned}$$

Zur Lösung der AWA

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

zerlegt man entsprechend den Anfangswert

$$x_0 = a_1 + \dots + a_k, \quad a_i \in \ker(A - \lambda_i E)^{v_i},$$

und erhält die Lösung

$$(9.13) \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^k e^{At} a_i \\ &= \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} \left(\sum_{m=0}^{v_i-1} \frac{t^m}{m!} (A - \lambda_i E)^m a_i \right). \end{aligned}$$

Für das Wachstum von $x(t)$ genügt man daraus die Aussage

$$(9.14) \quad \|x(t)\| = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} p_i(t),$$

$p_i(t)$: Polynom vom Grade $v_i - 1$.

Beispiel:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = 3, \quad k = 1.$$

Für $m = 1, 2, 3$ sind die Lösungen von (9.11):

$$m=1: (A - 2E)c_1 = 0; \quad c_1 = (1, 0, 0)^T;$$

$$m=2: (A - 2E)c_2 \neq 0, \quad (A - 2E)^2 c_2 = 0, \\ c_2 = (0, 1, 0)^T;$$

$$m=3: (A - 2E)^i c_3 \neq 0, \quad i=1, 2, \\ (A - 2E)^3 c_3 = 0 \\ c_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Man hat die Zerlegung

$$x_0 = (1, 2, 1)^T = c_1 + 2c_2 + c_3.$$

Ein Fundamentalsystem ist dann nach (9.12)

$$x^1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(t) = e^{2t} (c_2 + t(A - 2E)c_2) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 x^3(t) &= e^{2t} \left(c_3 + t(A-2E)c_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}t^2(A-2E)^2c_3 \right) \\
 &= e^{2t} \begin{pmatrix} 3t - t^2/2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Die Lösung der AWA lautet

$$x(t) = x^1(t) + 2x^2(t) + x^3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+5t - \frac{t^2}{2} \\ 2-t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.4 Zusammenhang mit JORDAN'scher Normalform

Ein Ergebnis der Matrizen-theorie besagt, daß es zur Matrix A eine (komplexe) reguläre Matrix C gibt, so daß $C^{-1}AC = J$ die sog. JORDAN'sche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \sigma & \\ & & & & \boxed{J_e} \end{pmatrix}$$

besitzt mit einem "JORDAN-Kasten"

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \vdots \\ & & \dots & \dots & 0 \\ & & & \dots & 1 \\ \sigma & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (\tau_i, \tau_i)\text{-Matrix,}$$

$i = 1, \dots, e.$

Dabei ist $\tau_1 + \dots + \tau_e = n$ und

$$P_m(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} \dots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e},$$

$$\tau_i \leq \nu_i \quad (\text{entsprechend}).$$

Die Transformation $y = C^{-1}x$ führt nach (8.12) auf die DGL

$$(9.15) \quad \dot{y} = C^{-1}ACy = Jy.$$

Diese zerfällt in Systeme

$$\dot{y}_i = J_i y_i, \quad i=1, \dots, l,$$

welche explizit lauten

$$\dot{x}_1 = \lambda_i x_1 + x_2,$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{\tau_i-1} = \lambda_i x_{\tau_i-1} + x_{\tau_i},$$

$$\dot{x}_{\tau_i} = \lambda_i x_{\tau_i}.$$

Beginnend mit der letzten Gleichung erhält man durch Integration ein Fundamentalsystem

$$\phi_i(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{\tau_i-1}}{(\tau_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{\tau_i-2}}{(\tau_i-2)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

und damit für (9.15) ein Fundamentalsystem

$$(9.16) \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} \boxed{\phi_1(t)} & & \sigma \\ & \ddots & \\ \sigma & & \boxed{\phi_e(t)} \end{pmatrix}.$$

Dies erhält man auch direkt aus der Fundamentallösung

$$\phi(t) = e^{Jt}$$

von (9.15), denn

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \sigma \\ & \ddots & \\ \sigma & & e^{J_e t} \end{pmatrix},$$

$$J_i = \lambda_i E_i + R_i, \quad R_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \sigma \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \sigma & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_i^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (\nu+1)\text{-te Zeile,}$$

$$R_i^{\nu} = 0 \quad \text{für } \nu \geq \tau_i,$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} e^{R_i t} = \sum_{\nu=0}^{\tau_i-1} e^{\lambda_i t} \frac{t^{\nu}}{\nu!} R_i^{\nu}$$

$$= \phi_i(t).$$

Die ursprüngliche Lösung $x(t) = C y(t)$ wird damit

$$(9.17) \quad \boxed{x(t) = e^{At} x_0 = C e^{Jt} C^{-1} x_0.}$$

Mit Hilfe dieser Darstellungen kann das asymptotische Verhalten der Lösung $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ untersucht werden.

(9.18) Satz:

(i) Genau dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0,$$

wenn $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt. Ist $\alpha > 0$ mit $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$ für alle λ , dann gibt es $c > 0$ mit

$$\|e^{At}\| \leq c e^{-\alpha t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

(ii) Genau dann ist e^{At} auf $[0, \infty)$ beschränkt, wenn gilt

(1) $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte λ von A ;

(2) Ist λ ein Eigenwert mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$, so enthält die JORDAN'sche Normalform nur eindimensionalen Blöcke zu diesem λ ($\tau_i = 1$).

Beweis: Wegen $e^{At} = C e^{Jt} C^{-1}$ sei
 o.E. $A = J$. Nun ist

$$e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_\ell t}),$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} e^{R_i t}, \quad e^{R_i t} \text{ Matrizen-} \\ \text{polynom}$$

und damit gilt die Abschätzung

$$\|e^{J_i t}\| = e^{(\text{Re } \lambda_i)t} \|e^{R_i t}\|$$

$$\|e^{R_i t}\| \leq c_i e^{\varepsilon t}$$

mit $\varepsilon > 0$ und c_i geeignet. Für
 $\tau_i = 1$ kann man $\varepsilon = 0$ wählen.
 Hieraus liest man die Behauptungen ab. ■

9.5 Phasenporträt linearer ebener Systeme

Die bisherigen qualitativen Aussagen über das Wachstum der Lösung können im Falle ebener Systeme ($n=2$) weiter konkretisiert werden. Sei A eine reelle $(2,2)$ -Matrix mit JORDAN'scher Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ oder } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$A = C J C^{-1}, \quad C = (c_1, c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}^2.$$

Die Hauptvektoren c_1, c_2 sind reell, falls λ_1, λ_2 reell sind. Jede Lösung der DGL $\dot{x} = Ax$ hat die Form

$$x(t) = e^{At} x_0 = C e^{Jt} C^{-1} x_0$$

$$(9.19) = \begin{cases} a_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} c_2, & \text{falls} \\ c_i \text{ Eigenvektor zu } \lambda_i; \\ e^{\lambda t} [(a_1 + a_2 t) c_1 + a_2 c_2], & \text{falls} \\ c_1, c_2 \text{ Hauptvektoren zu } \lambda; \end{cases}$$

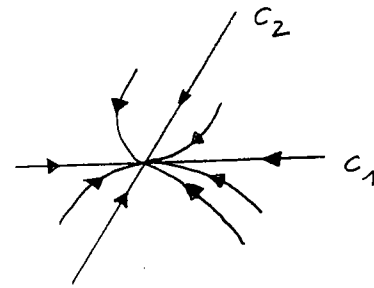
wobei $C^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

1. Fall: λ_1, λ_2 reell, $\lambda_2 < \lambda_1$

(a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} (a_1 c_1 + a_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} c_2) \\ \sim a_1 e^{\lambda_1 t} c_1 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Der Nullpunkt ist ein stabiler Knoten.

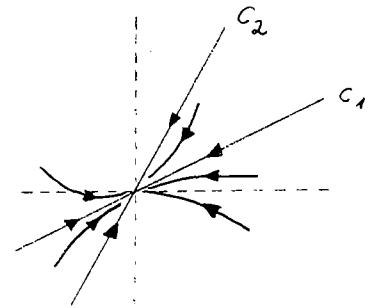


Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -6,$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

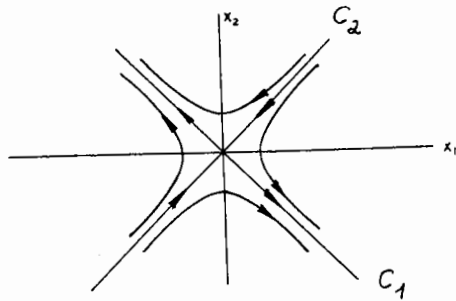


(b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

Der Nullpunkt ist ein instabiler Knoten, die Pfeile in (a) kehren sich um.

(c) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt.



Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2,$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ reell

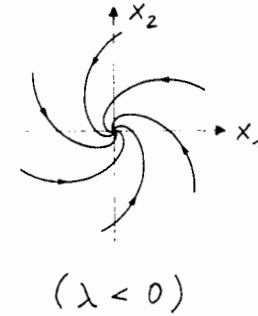
$$(a) \quad \underline{J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}: \quad x(t) = e^{\lambda t} x_0$$

$\lambda < 0$: stabiler Knoten

$\lambda > 0$: instabiler Knoten

$$(b) \quad \underline{J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}: \quad x(t) = e^{\lambda t} [(a_1 + a_2 t)c_1 + a_2 c_2].$$

Der Nullpunkt ist ein uneigentlicher Knoten.



3. Fall: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Nach (9.7) hat man ein Fundamentalsystem mit $c_1 = a + ib$,

$$c_2 = \bar{c} = a - ib:$$

$$x^1(t) = e^{\alpha t} (a \cos \beta t - b \sin \beta t),$$

$$x^2(t) = e^{\alpha t} (a \sin \beta t + b \cos \beta t).$$

Mit $D = (a, b)$ reelle $(2, 2)$ -Matrix

gilt

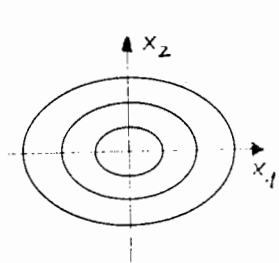
$$e^{At} = (x^1(t), x^2(t)) D$$

$$= e^{\alpha t} D \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} D^{-1}.$$

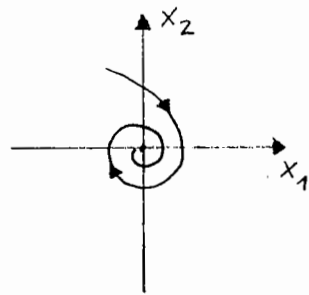
$\alpha = 0$: Die Lösungen sind periodisch um den Nullpunkt als Zentrum.

$\alpha < 0$: Der Nullpunkt ist eine Spiral Senke.

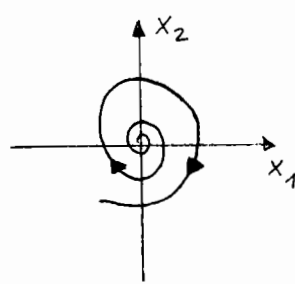
$\alpha > 0$: Der Nullpunkt ist eine Spiralquelle.



$\alpha = 0$



$\alpha < 0$



$\alpha > 0$

Beispiele: Die DGL für die harmonische Schwingung

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0 > 0,$$

ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm i \omega_0$, d.h. $\alpha = 0$, $\beta = \omega_0$. Also liegt ein Zentrum vor; die Lösung ist die periodische Schwingung

$u(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit der Frequenz $\omega_0 / 2\pi$.

Das ebene System

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

stellt eine Spiralsenke dar wegen

$$\lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - i, \quad \alpha = -1.$$

§ 10 Skalare lineare DGL n-ter Ordnung

Die lineare DGL n-ter Ordnung

$$(10.1) \quad L[u] = u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)u = b(t),$$

$a_i, b \in C(I)$, reell oder komplexwertig,

ist nach (1.11) äquivalent zu dem System

$$(10.2) \quad \dot{x} = A(t)x + c(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) & \end{pmatrix}$$

$$c(t) = (0, \dots, 0, b(t))^T,$$

$$x_i = u^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Anfangswerte für (10.1) lauten

$$u^{(i)}(t_0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zur Vereinfachung der Notation sei $a_n(t) \equiv 1$.

10.1 Grundlegende Aussagen über Lösungen

Aufgrund von Satz (8.3) besteht der

(10.3) Existenz- und Eindeutigkeits-satz:

Die AWA

$$L[u] = \sum_{i=0}^n a_i(t)u^{(i)} = b(t),$$

$$u^{(i)}(t_0) = \alpha_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

hat genau eine Lösung in I . Diese hängt in jedem kompakten Teilintervall von I stetig von $a_i(t)$, $b(t)$ ab.

Es gilt das

Superpositionsprinzip:

Sind $u_i(t)$ Lösungen von $L[u] = b_i(t)$, $i=1,2$, so ist $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ Lösung von $L[u] = \alpha b_1(t) + \beta b_2(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Für die homogene DGL $L[u]=0$ gilt aufgrund von Satz (3.4):

(10.4) Satz: Sind a, b reell (bzw. komplex), so bilden die reellen (bzw. komplexen) Lösungen der homogenen DGL $L[u]=0$ einen n -dim. Vektorraum über \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}).

Die Lösungen $u_1(t), \dots, u_n(t)$ von (10.1) sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & u_n(t) \\ \dot{u}_1(t) & & \dot{u}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix von (10.2) ist. Die zugehörige WRONSKI-Determinante lautet

$$W(u_1, \dots, u_n)(t) = \det \phi(t).$$

Wegen $\text{spur } A(t) = -a_{n-1}(t)$ besteht nach (8.10) die DGL

$$\dot{W} = -a_{n-1}(t)W,$$

also

$$(10.5) \quad W(u_1, \dots, u_n)(t) = W(u_1, \dots, u_n)(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds\right).$$

Eine Lösung von (10.2) ist nach (8.13)

$$x(t) = \phi(t) \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} c(s) ds.$$

Die erste Komponente $u(t) = x_1(t)$ ist dann eine Lösung von (10.1). Die Berechnung von $\phi(s)^{-1} c(s)$ nach der CRAMER'schen Regel ergibt

$$(\phi^{-1} c)_i = \frac{V_i}{W}, \quad W = \det \phi,$$

$$V_i = \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & b & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

↑
i-te Spalte

Wird V_i nach der i -ten Spalte entwickelt, so ergibt sich

$$V_i(t) = (-1)^{n+i} b(t) W_i(t)$$

$$W_i(t) := W(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)(t),$$

(Ordnung $n-1$).

Eine Lösung der inhomogenen DGL $L[u] = b(t)$ lautet damit

$$(10.6) \quad u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) (-1)^{n+i} \int_{t_0}^t \frac{W_i(s)}{W(s)} b(s) ds.$$

Im Falle $n=2$ liefert dies die Formel

$$(10.7) \quad u(t) = -u_1(t) \int_{t_0}^t \frac{u_2(s)}{W(s)} b(s) ds + u_2(t) \int_{t_0}^t \frac{u_1(s)}{W(s)} b(s) ds.$$

10.2 Konstante Koeffizienten

Es sei jetzt

$$(10.8) \quad L[u] = u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u = 0,$$

$a_i \in \mathbb{R} \text{ (} \in \mathbb{C} \text{)}.$

Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Berechnet man durch Entwicklung nach der letzten Zeile zu

$$(10.9) \quad P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0).$$

Die Übertragung der Ergebnisse in §9 auf (10.8) ergibt dem

(10.10) Satz: Ist λ eine k -fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so entsprechen ihr k Lösungen

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

von (10.8). Aus den n Nullstellen von $P(\lambda)$ (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) ergeben sich auf diese Weise ein Fundamentalsystem. Sind die a_i reell, so erhält man zu $\lambda = \alpha + i\beta$ die k komplexen Lösungen $t^i e^{\lambda t}$, $i = 0, \dots, k-1$. Ein reelles Fundamentalsystem wird dann erhalten durch

$$t^i e^{\alpha t} \cos \beta t, t^i e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (i = 0, \dots, k-1).$$

Direkter Beweis: Der Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ führt auf ($a_n = 1$)

$$(10.11) \quad L(e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^n \lambda^i a_i e^{\lambda t} = (-1)^n P(\lambda) e^{\lambda t},$$

d.h. $u(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung von (10.8), wenn $P(\lambda) = 0$. Um zu zeigen, daß bei einer k -fachen Nullstelle λ die Funktion $t^i e^{\lambda t}$ ($i \leq k-1$) eine Lösung ist, beachte man

$$t^i e^{\lambda t} = \frac{d^i}{d\lambda^i} e^{\lambda t}$$

und berechne mit (10.11)

$$L(t^i e^{\lambda t}) = L\left(\frac{d^i}{d\lambda^i} e^{\lambda t}\right)$$

$$= \frac{d^i}{d\lambda^i} L(e^{\lambda t}) = (-1)^n \frac{d^i}{d\lambda^i} (P(\lambda) e^{\lambda t}).$$

Nun gilt $P^{(i)}(\lambda) = 0$ ($i = 0, \dots, k-1$) und für festes t folgt mit der Produktregel

$$\frac{d^i}{d\lambda^i} (P(\lambda) e^{\lambda t}) = 0, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $t^i e^{\lambda t}$ zeigt man induktiv. ■

Beispiel:

$$u^{(5)} + 4u^{(4)} + 2u^{(3)} - 4\ddot{u} + 8\dot{u} + 16u = 0,$$

$$P(\lambda) = -(\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16)$$

$$= -(\lambda+2)^3 (\lambda-1+i)(\lambda-1-i).$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist

$$e^{-2t}, t e^{-2t}, t^2 e^{-2t}, e^t \sin t, e^t \cos t.$$

Für spezielle rechte Seiten $b(t)$ kann die inhomogene DGL $L[u] = b(t)$ explizit gelöst werden.

(10.12) Satz (Spezielle Inhomogenitäten)

Sei γ eine k -fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ($k=0$: γ ist nicht Nullstelle) und sei $b(t)$ ein (komplexwertiges) Polynom.

Dann gibt es genau ein Polynom $z(t)$ derart, daß $t^k z(t) e^{\gamma t}$ Lösung der DGL

$$L[u] = b(t) e^{\gamma t}$$

ist; $z(t)$ hat den gleichen Grad wie $b(t)$. Falls $a_i, b(t)$ reell sind und $\gamma = \alpha + i\beta$, so ist

$$\operatorname{Re}(t^k z(t) e^{\gamma t}) \text{ bzw. } \operatorname{Im}(t^k z(t) e^{\gamma t})$$

eine Lösung von

$$L[u] = b(t) e^{\alpha t} \cos \beta t$$

bzw.

$$L[u] = b(t) e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Beweisskizze: Definiere die lineare Abbildung

$$F: z(t) \rightarrow e^{-\gamma t} \underbrace{L(t^k z(t) e^{\gamma t})}_{z(t) \text{ Polynom; } e^{\gamma t} \cdot \text{Polynom}}$$

$F(z)(t)$ ist ein Polynom vom gleichen Grad wie das Polynom z . Man überlege, daß $\ker F = \{0\}$; also ist F bijektiv auf dem Raum der Polynome vom Grade $m, m \in \mathbb{N}$. Zum Polynom $b(t)$ gibt es daher genau ein Polynom $z(t)$ mit $F(z)(t) = b(t)$, d. h.

$$L(t^k z(t) e^{\gamma t}) = b(t) e^{\gamma t}. \quad \blacksquare$$

(10.13) Beispiel: Schwingungsgleichung

Die DGL der gedämpften Schwingung

$$m \ddot{u} = F(t, u, \dot{u}) = -k u - c \dot{u} + F_1 \cos \omega t$$

$k > 0$: elastische Rückstellkraft,

$c \geq 0$: Reibungskoeffizient

$F_1 \geq 0$: Amplitude einer periodisch wirkenden Kraft der Frequenz $\omega / 2\pi$,

führt auf die DGL 2. Ordnung

$$\ddot{u} + 2a \dot{u} + \omega_0^2 u = F_0 \cos t,$$

$$a = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad F_0 = \frac{F_1}{m}.$$

Homogene DGL:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + \omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} \leq 0.$$

Das zugehörige ebene System lautet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2a \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}.$$

Nach §9.5 erhält man das folgende asymptotische Verhalten:

(1) $a^2 > \omega_0^2$: große Reibung,
aperiodischer Fall.

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ reell,

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Der Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ ist ein stabiler Knoten.

(2) $a^2 = \omega_0^2$: aperiodischer Grenzfall

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -a,$$

$$u_1(t) = e^{-at}, \quad u_2(t) = t e^{-at}.$$

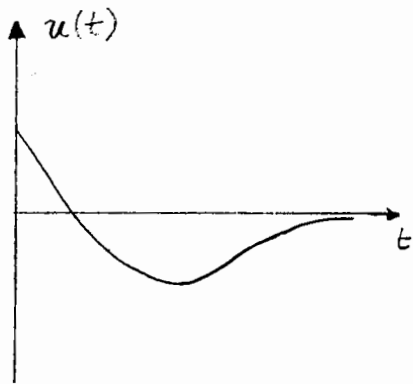
Der Nullpunkt ist ein uneigentlicher Knoten.

(3) $a^2 < \omega_0^2$: Gedämpfte Schwingung

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \alpha = -a, \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} \neq 0,$$

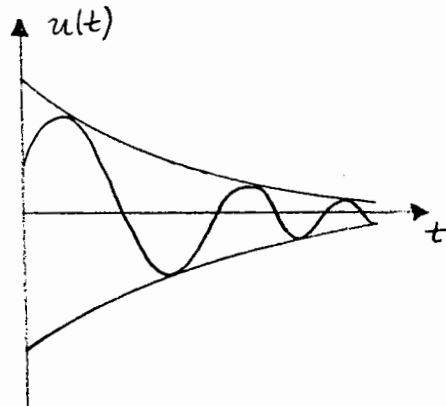
$$u_1(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t, \quad u_2(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Der Nullpunkt ist eine Spirale für $a \neq 0$.



Fall (2)

$$u(t) = e^{-at} (\alpha_1 + \alpha_2 t)$$



Fall (3)

$$u(t) = e^{-at} (\alpha_1 \sin \beta t + \alpha_2 \cos \beta t)$$

Inhomogene DGL

$$\ddot{u} + 2a\dot{u} + \omega_0^2 u = F_0 e^{i\omega t}, \quad \gamma = i\omega.$$

Nach Satz (10.12) betrachtet man die 2 Fälle:

(1) $\gamma = i\omega \neq \lambda_{1,2}$:

Der Ansatz $u(t) = d e^{\gamma t}$ ergibt

$$d e^{\gamma t} (\gamma^2 + 2a\gamma + \omega_0^2) = F_0 e^{\gamma t},$$

also

$$d = \frac{F_0}{P(\gamma)} = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2a\omega}$$

Die zugehörige Lösung ist

$$u_1(t) = \operatorname{Re}(d e^{\gamma t}) = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4a^2 \omega^2} \cos \omega t.$$

(2) $\gamma = i\omega = \lambda_{1,2}, \quad \omega = \omega_0$: Resonanz

Hier ist $a=0$ und der Ansatz

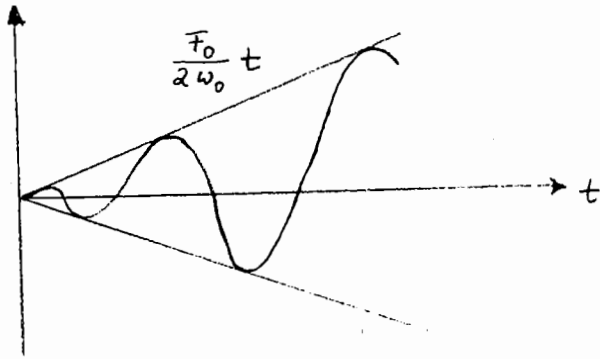
$$u(t) = (A + Bt) e^{i\omega_0 t}$$

führt auf

$$A=0, \quad B=-i \frac{F_0}{2\omega_0}$$

Die Lösung

$$u(t) = \operatorname{Re}(Bt e^{i\omega_0 t}) = \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



stellt eine sich aufschaukelnde
Schwingung dar; vgl. die Brücken-
katastrophe von Tacoma, BRAUN
(1975), p. 248 ff.

11.1 Trajektorien, singuläre Punkte

Eine Kurve in \mathbb{R}^n

$$t \rightarrow x(t)$$

gestattet verschiedene Parameter-
darstellungen. Die beiden Kurven

$$t \rightarrow x(t), \quad t \in I,$$

$$\tau \rightarrow y(\tau), \quad \tau \in \tilde{I},$$

heißen äquivalent, wenn
eine C^1 -Funktion $\varphi: I \rightarrow \tilde{I}$
existiert mit

$$a) \quad \dot{\varphi}(t) > 0 \quad \text{für } t \in I,$$

$$b) \quad x(t) = y(\varphi(t)) \quad \text{für } t \in I.$$

Nach Vor. a) existiert die Um-
kehrfunktion $\psi(\tau)$ von $\varphi(t)$,

so daß

$$x(\psi(\tau)) = y(\tau), \quad \tau \in \tilde{I}.$$

Für die Lösung $x(t; x_0)$ der
AWA (11.2) heißt die Äquivalenz-
klasse der Kurve $t \rightarrow x(t; x_0)$
die Trajektorie. Die Teilmenge

$$S = \{x(t; x_0) \mid t \in I_{\max}\}$$

heißt die Spur bzw. der orbit
der Trajektorie.

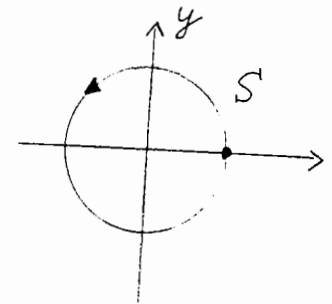
Beispiel: Die AWA

$$\dot{x} = y, \quad x(0) = 1$$

$$\dot{y} = -x, \quad y(0) = 0$$

hat die Lösung

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t).$$



§ 11 Autonome Differentialgleichungen

Zu $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C_m^1(D)$ betrachten wir die autonome DGL

$$(11.1) \quad \dot{x} = f(x).$$

Sei $I_{\max} = (t^-, t^+)$ das maximale Existenzintervall einer Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz (6.9) ergibt man unmittelbar:

Einfache Eigenschaften von Lösungen

- 1.) Die Funktion $y(t) = x(t+c)$, $c \in \mathbb{R}$, ist Lösung von (11.1) mit $y(t_0 - c) = x_0$.

- 2.) Ist $y(t)$ eine Lösung der AWA $\dot{x} = f(x)$, $x(\tilde{t}_0) = x_0$, dann gilt $y(t) = x(t+c)$ mit $c = t_0 - \tilde{t}_0$.

- 3.) Gilt $x(\tilde{t}_0) = x_0$ für ein $\tilde{t}_0 \in I_{\max}$, $\tilde{t}_0 \neq t_0$, so existiert $x(t)$ in \mathbb{R} und ist c-periodisch mit $c = |\tilde{t}_0 - t_0|$, d.h. es gilt $x(t+c) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

O.E. können wir daher

$$t_0 = 0$$

setzen und bezeichnen die Lösung der AWA

$$(11.2) \quad \dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

mit $x(t; x_0)$.

Diese Kurve ist äquivalent zu

$$\tau \rightarrow (\cos(\tau/c), \sin(\tau/c)), \\ c > 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Die entsprechende C^1 -Funktion ist

$$\varphi(t) = c \cdot t, \quad \dot{\varphi}(t) = c > 0.$$

Wiederum aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz (6.9) erhält man

(11.3) Satz:

(a) Jeder Punkt $x_0 \in D$ liegt genau auf einem Orbit. Je zwei Orbits stimmen überein oder sind disjunkt.

(b) Zu einer nichtperiodischen Lösung gehört ein Orbit

ohne mehrfache Punkte, zu einer periodischen Lösung dagegen ein geschlossener Orbit.

Die Äquivalenz zweier Kurven innerhalb einer Trajektorie kann auf einfache Weise nachgeprüft werden.

(11.4) Hilfssatz: Sei

$$\tau \rightarrow y(\tau), \quad \tau \in \tilde{I},$$

eine Kurve mit

$$\dot{y}(\tau) = k(\tau) f(y(\tau)),$$

$$k(\tau) > 0 \quad \text{für } \tau \in \tilde{I}.$$

Dann liegt $\tau \rightarrow y(\tau)$ in einer Trajektorie, d.h. es gibt eine C^1 -Funktion

11.7

$\varphi: I \rightarrow \tilde{I}$, so daß $x(t) = y(\varphi(t))$
eine Lösung von (11.1) in I
ist. Bis auf eine Verschiebung
 $t \rightarrow t + c$ ist $\varphi(t)$ eindeutig
bestimmt.

Beweis: Für die gesuchte Funktion
 $\varphi: I \rightarrow \tilde{I}$ mit $x(t) = y(\varphi(t))$
erhält man aus

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dy}{d\tau}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ &= k(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) f(x(t)) \\ &= f(x(t))\end{aligned}$$

die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}k(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) &\equiv 1, \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{k(\varphi(t))} > 0.\end{aligned}$$

11.8

Aus dieser DGL mit getrennten
Variablen erhält man $\varphi(t)$ gemäß

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} k(\tau) d\tau = t_1 - t_0 \quad \blacksquare$$

Ein Punkt $x_s \in \mathbb{R}^m$ mit

$$(11.5) \quad f(x_s) = 0$$

heißt singulärer Punkt bzw.
Ruhelage. Die AWA

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_s$$

hat dann die stationäre Lösung
 $x(t) \equiv x_s$. Als Übung zeige man
die folgende Aussage

(11.6) Hilfssatz: Ist $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ und existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$, so ist x^* ein singulärer Punkt.

11.2 Anwendung auf ebene autonome Systeme

Wir betrachten ein ebenes autonomes System der Form (4.7)

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned}$$

mit Funktionen $f, g \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Im Falle $f(x, y) > 0$ erhält man die skalare DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Ist $y(x)$ eine Lösung in I , so ist der Graph

$$\{(x, y(x)) \mid x \in I\}$$

ein Orbit von (11.7). Denn

$$x \rightarrow (x, y(x))$$

ist eine Kurve mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x, y(x)) &= (1, y'(x)) \\ &= \frac{1}{f(x, y(x))} (f(x, y), g(x, y)). \end{aligned}$$

Also hat man $k(x) = 1/f(x, y(x))$ in Hilfssatz (11.4) zu setzen.

Dies führt auf die

Orientierung

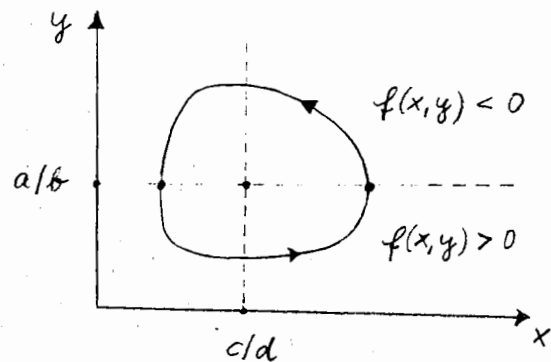
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x, y(x))} = t_1 - t_0.$$

Beispielsweise ergibt sich für das Modell von LOTKA-VOLTERRA

$$\dot{x} = (a - by)x,$$

$$\dot{y} = (-c + dx)y,$$

die folgende Orientierung der Lösungen



Im Falle $f(x, y) < 0$ hat man die entgegengesetzte Orientierung zu nehmen. Entsprechendes gilt im Falle $g(x, y) \neq 0$.

Sei $H \in C^1(D)$ mit

$$H_x f + H_y g \equiv 0.$$

Dann heißt $H(x, y) = \text{const.}$ ein erstes Integral von (11.7), vgl. (4.10). Mit Hilfe von (11.3) holen wir nun den noch ausstehenden Beweis von Satz (4.11) (b) nach.

(11.8) Satz: Sei $H(x, y) = \text{const.}$ ein erstes Integral von (11.7). Dann ist jede Niveaulinie von H , die nicht durch

einen singulären Punkt führt und $(H_x, H_y) \neq 0$ erfüllt ein Orbit von (11.7).

Beweis: Auf einer solchen Niveau-
linie von H gilt

a) $(H_x, H_y) \neq 0$, $(f, g) \neq 0$,

b) $(H_x, H_y) \perp (f, g)$, da $H_x f + H_y g = 0$,

c) $(H_x, H_y) \perp$ Niveau-
linie.

Daher ist die Tangente der Niveau-
linie proportional zu (f, g) . Die
Behauptung folgt dann aus
Hilfssatz (11.4) bei geeigneter
Orientierung.

(11.9) Beispiel: Räuber - Beute-
-Modell mit logistischem
Wachstum

Das Modell lautet

$$\dot{x} = ax - bxy - ex^2 = (a - by - ex)x,$$

$$\dot{y} = -cy + dxy - fy^2 = (-c + dx - fy)y,$$

$$a, b, c, d, e, f > 0.$$

Sei (x_s, y_s) der Schnittpunkt der
Geraden

$$L: a - by - ex = 0,$$

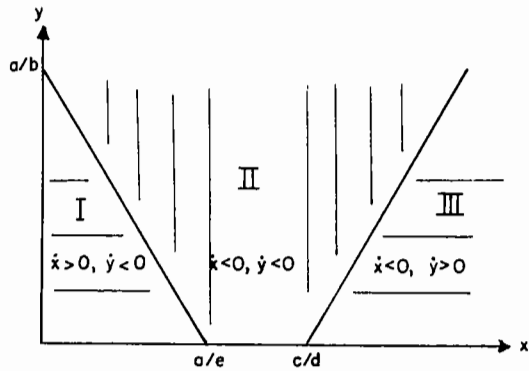
$$M: -c + dx - fy = 0.$$

Die sämtlichen singulären
Punkte lauten damit

$$(0, 0), \left(0, -\frac{c}{f}\right), \left(\frac{a}{e}, 0\right), (x_s, y_s).$$

setzt man $a/e < c/d$ voraus,
so gewinnt man durch das
Studium der Vorzeichen von \dot{x} und
 \dot{y} die Aussagen, vgl. Figur:

- die Lösung bleibt in I,
- die Lösung verläßt III,
- die Lösung kann nicht von II nach III verlaufen.



Zusammen mit Hilfssatz (11.6)
ergibt dies (vgl. BRAUN, S. 569 ff)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{a}{e}, 0 \right)$$

für alle $x_0, y_0 > 0$,

d.h. die Räuber-Population
stirbt aus.

(11.10) Beispiel: Wir zeigen, daß
jede Lösung der skalaren DGL
zweiter Ordnung

$$\ddot{z} + z + z^3 = 0$$

periodisch ist. Für $x = z$, $y = \dot{z}$
erhält man das ebene autonome
System

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3$$

mit dem ersten Integral

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^4) = \text{const.}$$

Die Niveaulinien von H sind geschlossene Kurven um den singulären Punkt $(0, 0)$, also ist $z(t)$ periodisch nach (11.8).